1. Übung zur Komplexen Analysis

1. Berechnen Sie:
$$\sqrt[3]{1-i},\ \sqrt[n]{-1},\ \sqrt[n]{i} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$
(mit Skizze!)

2. Stellen Sie graphisch dar:
$\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - 3i)| \leq 2\}$; $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z - i)(1 + i)) > 0\}$;
$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < |z + 3|\}$; $\{z \in \mathbb{C} : |z| + |z + i| = 2\}$.

3. Sei $|z - 1| = 1$. Man zeige:
$$\arg(z - 1) = 2 \arg z = \frac{2}{3} \arg(z^2 - z)$$

4. $\mathbb{R}[x]$ bezeichne den Ring aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Durch
$$P_1(x) \sim P_2(x) \iff P_1(x) - P_2(x) \text{ ist durch } x^2 + 1 \text{ ohne Rest teilbar}$$
wird auf $\mathbb{R}[x]$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Die Menge der dadurch festgelegten Äquivalenzklassen bildet mit den in der üblichen Weise definierten Operationen $+$ und $\cdot$ den Quotientenring $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ und $\mathbb{C}$ an. (Dieses Modell von $\mathbb{C}$ stammt von Cauchy.)

5. Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar?
$$\begin{aligned} f(z) &= (\bar{z})^2 \\ f(z) &= \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \tfrac{y}{x} \\ f(z) &= \sin^2(x + y) + i \cos^2(x + y) \end{aligned}$$
Hier ist $z = x + i\,y$.

6. Zeigen Sie: Eine holomorphe Funktion ist auf einem zusammenhängenden Definitionsbereich durch ihren Imaginärteil bis auf Addition einer (reellen) Konstanten eindeutig festgelegt.

7. Bestimmen Sie zu $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sodass u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllen:
$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^{y} \cos x$$

8. Zeigen Sie: Ist f holomorph auf einem Gebiet G und gilt $|f| = \text{const.}$, dann ist f konstant auf G.