

# Operations Research UE

Juni 2014

33. Ein Einzelhändler hat drei Frühstückscerealienmarken im Sortiment. Nachdem er die Verkaufszahlen der letzten Wochen analysiert hat, hat er festgestellt, dass Kallogs 12% ihrer Kunden an Cranch und 19% ihrer Kunden an Pascal Cereals verloren hat. Ferner wechselten 16% der Cranch Kunden zu Kallogs und 10% zu Pascal Cereals. Auch Pascal Cereals haben Kunden verloren, 20% an Kallogs und 14% an Cranch.

In der aktuellen Woche haben nun 1500 Kunden Kallogs, 1400 Cranch und 2000 Pascal Cereals gekauft. Wie viele Kunden werden nun erwartungsgemäß Kallogs, Cranch und Pascal Cereals in genau zwei Wochen kaufen?

34. Angaben wie bei Beispiel 33. Wie viele Wochen werden erwartungsgemäß vergehen, bis ein Cranch Kunde auf Kallogs wechselt? Unter der Annahme, dass ein Kunde gerade Pascal Cereals gekauft hat, wie viele Wochen werden erwartungsgemäß vergehen bis dieser Kunde wieder Pascal Cereals kauft?

35. Eine Reparaturwerkstatt bearbeitet 2 Motortypen M1 und M2. Die Reparatur von M1 dauert zwei Tage, die von M2 dauert einen Tag. An jedem Morgen ist die

- Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein M1-Motor repariert werden muß  $1/3$ .
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein M2-Motor repariert werden muss, ist  $1/2$ .

Reparaturaufträge, die die Werkstatt nicht fertigstellen kann, werden anderweitig vergeben. Ist ein Arbeitstag der erste Reparaturtag eines M1-Motors, dann wird jede neue Arbeit auch für den nächsten Tag zurückgewiesen. An jedem anderen Tag wird jeder Motortyp (jeweils nur eine Maschine) zur Reparatur angenommen.

2 Strategien sind möglich: a) Die Reparatur von M1 bevorzugt vor M2  
b) Die Reparatur von M2 bevorzugt vor M1

Welche Politik bedingt höhere Auslastung der Werkstatt?

## Lösung zu 35.

Berechnung der Übergangsmatrizen: mögliche Zustände sind

- Zustand 0 ... keine Arbeit
- Zustand 1 ... 1. Reparaturtag eines M1 - Motors
- Zustand 2 ... 2. Reparaturtag eines M1 - Motors
- Zustand 3 ... Reparaturtag eines M2 – Motors

Folgende Wahrscheinlichkeiten IP folgen:

IP ( kein M1-Motor fällt zur Reparatur an ) =  $1 - 1/3$

IP ( kein M2-Motor fällt zur Reparatur an ) =  $1 - 1/2$

IP ( keine Arbeit ) =  $2/3 \cdot 1/2$

Die Wahrscheinlichkeit für „keine Arbeit“ ist demnach unabhängig vom Zustand des vorangegangenen Tages. Das gilt aber nur dann, wenn am Vortag nicht mit der Reparatur eines M1-Motors begonnen wurde. Im letzteren Fall ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $IP(\text{keine Arbeit}) = 0$ .

Bei Anwendung der Politik a) ergibt sich folgende Übergangsmatrix  $P_A$ :

	0	1	2	3
0	1/3	1/3	0	1/3
1	0	0	1	0
2	1/3	1/3	0	1/3
3	1/3	1/3	0	1/3

Bei Anwendung der Politik b) ergibt sich folgende Übergangsmatrix  $P_B$ :

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Im Falle von ergodischen Zuständen gilt für die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij} = \pi_j$ . Speziell muss für die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten gelten:

$$\sum_j \pi_j = 1$$

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für Politik a) folgendes Gleichungssystem:

$$1/3 \pi_0 + 0 \pi_1 + 1/3 \pi_2 + 1/3 \pi_3 = \pi_0$$

$$1/3 \pi_0 + 0 \pi_1 + 1/3 \pi_2 + 1/3 \pi_3 = \pi_1$$

$$0 \pi_0 + 1 \pi_1 + 0 \pi_2 + 0 \pi_3 = \pi_2$$

$$1/3 \pi_0 + 0 \pi_1 + 1/3 \pi_2 + 1/3 \pi_3 = \pi_3$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Verifizieren Sie, dass die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten gleich

$$\pi_0 = 1/4; \pi_1 = 1/4; \pi_2 = 1/4; \pi_3 = 1/4$$

ist, also die Werkstatt ist zu 3/4 der Gesamtzeit ausgelastet.

In ähnlicher Weise gilt für die Politik b) (bitte ergänzen)

$$\dots \pi_0 + \dots \pi_1 + \dots \pi_2 + \dots \pi_3 = \pi_0$$

$$\dots \pi_0 + \dots \pi_1 + \dots \pi_2 + \dots \pi_3 = \pi_1$$

$$\dots \pi_0 + \dots \pi_1 + \dots \pi_2 + \dots \pi_3 = \pi_2$$

$$\dots \pi_0 + \dots \pi_1 + \dots \pi_2 + \dots \pi_3 = \pi_3$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

**Verifizieren** Sie, dass die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten gleich

$$\pi_0 = 2/7; \pi_1 = 1/7; \pi_2 = 1/7; \pi_3 = 3/7$$

ist, also die Werkstatt ist zu 5/7 der Gesamtzeit ausgelastet. **Somit ist vom Gesichtspunkt der Auslastung welche Politik zu bevorzugen?**

36. Angaben wie bei Beispiel 33. Langfristig, wie groß wird der Marktanteil von Kallogs, Cranch und Pascal Cereals sein?