## 1. Übung Statistische Methoden SS17 Grill

1. Die Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ stammt aus einer Verteilung mit

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} p_0 & \text{wenn } k = 0, \\ \frac{(1-p_0)\lambda^k}{k!(e^\lambda - 1)} & \text{wenn } k \geq 1 \end{cases}$$

   ("zero-inflated Poisson").

   Bestimmen Sie die Momenten- und Maximum-Likelihood Schätzer für $p_0$ und $\lambda$ (ML führt auf eine transzendente Gleichung - ganz Fleißige dürfen sich die eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichung überlegen).

2. Es sei $X \sim B(n, p)$, $Y \sim \beta(k+1, n-k)$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(Y \geq p).$$

   Zeigen Sie damit, dass der Test für $H_0 : p = p_0$, wenn $x$ die Anzahl der Erfolge in einer Stichprobe der Größe $n$ ist, also verwerfen, wenn $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \alpha/2$ oder $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \alpha/2$, in der Form

$$p \leq \beta_{x,n-x+1;\alpha/2} \text{ oder } p \geq \beta_{x+1,n-x;1-\alpha/2}$$

   geschrieben werden kann. Wegen der Äquivalenz zwischen Tests und Konfidenzintervallen sind diese Zahlen die Grenzen eines $1-\alpha$ Konfidenzintervalls. Sie können aus den üblichen Tabellen f'ur die $F$-Verteilung mittels der Beziehung

$$\beta_{a,b\alpha} = \frac{aF_{2a,2b,\alpha}}{aF_{2a,2b;\alpha} + b}$$

   erhalten werden.

   Eine ähnliche Beziehung besteht zwischen der Poisson- und der Gammaverteilung. Besonder Fleißige dürfen sich die Details überlegen.

3. Testen Sie die folgende Stichprobe

   2 0 1 2 5 0 2 2 3 0

   0 2 3 1 2 4 0 0 1 1

   3 1 0 1 2

   darauf, ob sie aus der Verteilung von Beispiel 1 stammt.

4. (a) Zeigen Sie für den $\chi^2$-Anpassungstest

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i^2}{np_i} - n.$$

   (b) Ein Weg, den minimum distance Schätzer anzusetzen, ist eine gegebene Klasseneinteilung, etwa äquidistant $([h(i-1), hi])$ zu verwenden und die $\chi^2$-Statistik als Distanz zu verwenden. Bestimmen Sie den entsprechenden Schätzer für eine Gleichverteilung $U[0, \theta]$. (Zusatzaufgabe: Konsistenz?, für ganz mutige: asymptotische Verteilung?)