101.484 VU Computernumerik
106.054 UE AKNUM Computernumerik

Übungsbeispiele zur VO 106.001 AKNUM COMPUTERNUMERIK

106.986 UE Numerische Mathematik für LA

Übungsbeispiele zur VO 106.942 NUMERISCHE MATH FÜR LA

Gabriela Schranz-Kirlinger

Bitte bearbeiten Sie für die zweite Übung (Die 30/4 und Do 1/5/2013) **alle** Beispiele des 2. Kapitels und kreuzen Sie in der Übung dann diejenigen Beispiele an, die Sie verstanden haben und auch an der Tafel nach Aufrufen vorrechnen können.
Wenden Sie sich bei Unklarheiten oder Fragen an G. Schranz-Kirlinger oder M. Noya.

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme

25. Berechnen Sie die Konditionszahlen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

für mindestens zwei verschiedene Normen.

26. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Parameterdarstellung

$$g_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Berechnen Sie die exakte Lösung und die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Koeffizientenmatrix A des zu lösenden Gleichungssystms, geben Sie eine geometrische Interpretation.
Betrachten Sie auch die Umskalierung der beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 200,0 \\ 100,0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,45 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,0045 \end{pmatrix}$$

und erläutern Sie die Auswirkungen.

27. Lösen und untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme $A_i\vec{x} = \vec{b}$, mit $i = 1, 2$ und den beiden Koeffizientenmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

und jeweils der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Inhomogenität mit Störung $\tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.99999 \\ 1.00001 \end{pmatrix}$.

28. *LU-Zerlegung.* Führen Sie eine LU-Zerlegung ohne bzw. mit Zeilentausch für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der 2×2-Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 2.25 \\ 0.50 & 4.00 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.000011111 \\ 9.444444444 \end{pmatrix}$$

in 10-stelliger Dezimalrechnung (Taschenrechnerarithmetik) durch. Berechnen Sie $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

29. *LU-Zerlegung.* Führen Sie eine LU-Zerlegung in MATLAB (oder in Maple, ...) durch. Dazu sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -14 \\ 3 & 6 & a & -15 \\ -4 & -14 & -15 & 30 \end{pmatrix}$$

gegeben für einen Parameter $a \in R$. Geben Sie an, für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ diese LU-Zerlegung nicht existiert.

30. Lösen Sie ohne Rechnerunterstützung das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Gauß Algorithmus einmal ohne Pivotsuche und einmal mit Pivotsuche. Verwenden Sie dabei jeweils eine dreistellige dezimale Gleitpunktarithmetik. (Das Ergebnis nach jeder Operation auf drei gültige Dezimalstellen runden.)

31. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$.
- Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1,1)^T$, $\Delta\vec{b}_1 = (\delta,\delta)^T$ und $\Delta\vec{b}_2 = (\delta,-\delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$, $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_1) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_1$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_2) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_2$. Vergleichen Sie die jeweiligen relativen Fehler

  $$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta\vec{x}_2)\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

  mit der allgemeinen Fehlerschätzung

  $$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \kappa(A)\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

32. Bestimmen Sie zu den Stützpunkten

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
f_j	0	1	2	0

dasjenige Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ zweiten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{j=0}^{3}(p(x_j) - f_j)^2$$

minimiert.

Hinweis: Lösen Sie die zugehörigen Normalgleichungen.