101.484 VU Computernumerik
106.054 UE AKNUM Computernumerik

Übungsbeispiele zur VO 106.001 AKNUM Computernumerik

106.986 UE Numerische Mathematik für LA

Übungsbeispiele zur VO 106.942 Numerische Math für LA

Gabriela Schranz-Kirlinger

Bitte bearbeiten Sie für die dritte Übung (Die 14/5 und Do 16/5/2013) **alle** Beispiele des 3. Kapitels und kreuzen Sie in der Übung dann diejenigen Beispiele an, die Sie verstanden haben und auch an der Tafel nach Aufrufen vorrechnen können.

Wenden Sie sich bei Unklarheiten oder Fragen an G. Schranz-Kirlinger oder M. Noya.

Kapitel 3: Nichtlineare Gleichungssysteme

33. Berechnen Sie die Nullstelle x^* für die Funktion $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedende Startwerte.

34. Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Nullstelle von $f(x) = \arctan x$, verwenden Sie auch das gedämpfte Newtonverfahren mit geeigneten Dämpfungsfaktoren. Probieren Sie verschiedene Startwerte und versuchen Sie die Grenzen des Einzugsbereichs herauszufinden.

35. Iterative Apporoximation der Zahl π:
$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (2^{-k}u_k)^2})}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

36. Zeigen Sie, dass die Iteration $x_{n+1} = \cos x_n$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt χ, $\chi = \cos\chi$, konvergiert.
    (a) Formulieren Sie das Newtonverfahren zur Berechnung von χ. Konvergiert dieses Verfahren ebenfalls für jeden Startwert?
    (b) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit der beiden Iterationsverfahren.

37. Gegeben sei die Gleichung $x + \ln x = 0$ deren eindeutige Lösung im Intervall $[0.5, 0.6]$ liegt. Betrachten Sie zur approximativen Lösung dieser Gleichung die folgenden drei Iterationsverfahren
$$x_{n+1} := -\ln(x_n), \quad x_{n+1} := \exp(-x_n), \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$$
zu verschiedenen Startwerten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

38. Die Funktion $\ln x$ soll an der Stelle $x = a > 0$ nährerungsweise berechnet werden. Das kann z.B. mit dem Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion
$$f(x) = e^x - a$$
geschehen. Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an und weisen Sie experimentell die quadratische Konvergenz nach. Berechnen Sie für $a = 1$ und Startwert $x_0 = 1$ die ersten vier Iterierten x_1, x_2, x_3, x_4. Auf wieviele Nachkommastellen genau stimmen diese mit dem tatsächlichen Wert $0 = \ln 1$ überein?

39. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$F(u, v) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sin u}{4} + v, 1 + \sin v + u)^T.$$
    (a) Untersuchen Sie die Kontraktionseigenschaft von $F(u, v)$ jeweils bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$.
    (b) Berechnen Sie den Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ von $F(u, v)$ mittels der gewöhnlichen Fixpunktiteration, für den Startwert $x_0 = (0, 0)^T$. Wie oft ist bei der Verwendung der a priori-Fehlerabschätzung zu iterieren, bis
    $$\|x_n - \bar{x}\| \leq 10^{-2}$$
    garantiert werden kann?