101.484 VU Computernumerik
106.054 UE AKNUM Computernumerik

Übungsbeispiele zur VO 106.001 AKNUM Computernumerik

106.986 UE Numerische Mathematik für LA

Übungsbeispiele zur VO 106.942 Numerische Math für LA

Gabriela Schranz-Kirlinger

Bitte bearbeiten Sie, die Ihnen zugeteilte Aufgabe, geben Sie eine schriftliche Ausarbeitung von etwa zwei Seiten in den Übungsstunden ab und bereiten Sie sich auf eine kurze Präsentation von etwa fünf Minuten vor. Die schriftliche Ausarbeitung soll den fachlichen Hintergrund der Aufgaben in einem geeignetem Ausmaß beleuchen. Die Beispiele sind unterschiedlich im Schwierigkeitsgrad und im Aufwand. Das wird natürlich einerseits bei der Beurteilung berücksichtigt, andererseits sollten sich diese Unterschiede aber herausmitteln, da Sie ja mehrere Beispiele ausarbeiten. In den Übungsstunden besteht Anwesenheitspflicht.

Wenden Sie sich bei Unklarheiten oder Fragen an G. Schranz-Kirlinger oder M. Noya.

Kapitel 4: Interpolation

40. Betrachten Sie die Funktion
$$f(x) = \cos x$$
auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:
    (a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \pi$
    (b) Polynom vom Grad 2: $x_0, x_1, x_2 = \frac{\pi}{2}$
    (c) Polynom vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$
    (d) Theoretische Abschätzung des Interpolationsfehlers für (c) an der Stelle $\frac{\pi}{3}$

41. Betrachten Sie die Funktion
$$f(x) = \cos x$$
auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:
    (e) gerades Polynom 4. Grades: x_0, x_1, x_2
    (f) ungerades Polynom 3. Grades: x_0, x_1
    (g) Taylorpolynom vom Grad $n = 4$
    (h) Interpolation mit Lagrange Polynomen an x_0, x_1, x_2

42. Betrachten Sie die Funktion
$$f(x) = \sinh x$$
auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:
    (a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \pi$
    (b) Polynom vom Grad 2: $x_0, x_1, x_2 = \frac{\pi}{2}$
    (c) Polynom vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$
    (d) Theoretische Abschätzung des Interpolationsfehlers für (c) an der Stelle $\frac{\pi}{3}$

43. Betrachten Sie die Funktion
$$f(x) = \sinh x$$
auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:
    (e) gerades Polynom 4. Grades: x_0, x_1, x_2
    (f) ungerades Polynom 3. Grades: x_0, x_1
    (g) Taylorpolynom vom Grad $n = 4$
    (h) Interpolation mit Lagrange Polynomen an x_0, x_1, x_2

44. Interpolieren Sie die Funktion von Runge
$$f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$$
auf $[-1,1]$ auf zwei Arten:

   (a) Äquidistanten Punkten $x_j = -1 + \frac{2j}{n} \quad j = 0,1,\dots,n$

   (b) An den Nullstellen des $n+1$-ten Tschebyscheff Polynoms T_{n+1}

45. *Nevilleschema.* Schreiben Sie eine kurze Ausarbeitung zum Thema Nevilleschema. Die Stützpunkte $(0,1)$, $(1,3)$ und $(3,2)$ sind gegeben. Berechnen Sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$.

46. Berechnen Sie zu den drei Stützpunkten $(x_j, \tan^2(x_j))$ für $j = 0,1,2$ mit den Stützstellen
$$x_0 = \frac{\pi}{6}, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3}$$
unter Verwendung des Nevilleschemas das Interpolationspolynom.

47. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom in der Newtondarstellung zu den Stützstellen:

j	0	1	2	3	4
x_j	-5	-2	-1	0	1
f_j	17	8	21	42	35

48. Approximieren Sie die Funktion $f(x) = \log_2(x)$.

   (a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit den Stützstellen 16, 32 und 64.

   (b) Bestimmen Sie die lineare Ausgleichsgerade zu diesen Stützstellen und vergleichen Sie sie mit dem Interpolationspolynom aus (a).

49. Wir betrachten die Funktion
$$f(x) = x^8.$$
Bestimmen Sie zu $f(x)$ das interpolierende Polynom vom Grad $n \leq 6$ zu den Stützstellen.

j	0	1	2	3	4	5	6
x_j	-3	-2	-1	0	1	2	3

50. Berechnen Sie für die Stützpunkte $\{(x_k, y_k)\} = \{(0,0), (1,3), (2,2), (3,1)\}$ die Dividierten Differenzen
$$[x_0, x_1] \qquad [x_0, x_1, x_2] \qquad [x_0, x_1, x_2, x_3]$$
und geben Sie das entsprechende Newtonsche Interpolationspolynom an.

51. Hermiteinterpolation: Gesucht ist ein Polynom 4. Grades, das eine Funktion mit den Eigenschaften
$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 1, \quad f(4) = 3, \quad f'(4) = 2 \quad f''(4) = 1$$
interpoliert.

52. Gegeben sind die vier Stützpunkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,-1)$ und $(9,0)$. Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB eins interpolierendes Polynom $g(x)$, sowie die Funktionswerte $g(0.5)$, $g(2.5)$ und $g(6.5)$. Zeichnen Sie unter Verwendung von MATLAB die Stützpunkte und $g(x)$ im Intervall $[0,9]$.

53. Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion $f(x) = x \sin x$, indem Sie 5 Werte für h (etwa 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005,0.0001) wählen und das Interpolationspolynom durch diese Werte bei 0 auswerten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen bei Berechnung mit dem einseitigen und dem zentralen Differenzenquotienten.

54. Betrachten Sie das Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Um eine Polynominterpolationproblem der Form $p(x_i) = p_i$ $i = 0,1,2,...,n$ zu lösen, könnte man ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a_i von $p(x)$ aufstellen. Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b. Lösen Sie das Interpolationsproblem mit den Daten $n = 10$, $x_i = \frac{i-5}{5}$ und $p_i = (-1)^i \sin(x_i)$.

55. Berechnen Sie das Hermitsche Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützpunkten $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,3)$ mit $f'(0) = 2$ und $f''(0) = 2$.

56. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \cos x$ den Wert $\cos 0$, indem Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützpunkten $(h, \cos h)$ für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ an der Stelle 0 auswerten. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wahren Wert.

57. Betrachten Sie ein einfaches Approximationsproblem in anderen Normen: Es soll diejenige Gerade $y(x) = ax + b$ bestimmt werden, die von den Punkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0.5, 0.25)$ den kleinsten Abstand in der Maximumsnorm

$$\min_{a,b}\{\max\{|b|, |a+b-1|, |0.5a+b-0.25|\}\},$$

und in der 1-Norm hat

$$\min_{a,b}\{|b| + |a+b-1| + |0.5a+b-0.25|\}.$$

Man kann jeweils durch eine Fallunterscheidung die optimalen Werte für a un b betimmen.

58. Überprüfen Sie, dass die dividierten Differenzen $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}]$ genau die Koeffizienten der entsprechenden interpolierenden Polynome $p(x)$ in der Newtondarstellung sind. Bilden Sie das Tableau der dividierten Differenzen, lesen Sie daraus die Koeffizienten für $p(x)$ ab und beschreiben Sie die horner-artige Auswertung von $p(x)$ an einer Stell x.

59. Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion $\omega(\bar{x}) = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)...(\bar{x} - x_n)|$ ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max_{0 \le \bar{x} \le 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.