101.484 VU Computernumerik
106.054 UE AKNUM Computernumerik

Übungsbeispiele zur VO 106.001 AKNUM Computernumerik

106.986 UE Numerische Mathematik für LA

Übungsbeispiele zur VO 106.942 Numerische Math für LA

Gabriela Schranz-Kirlinger

Bitte bearbeiten Sie, die Ihnen zugeteilte Aufgabe, geben Sie eine schriftliche Ausarbeitung von etwa zwei Seiten in den Übungsstunden ab und bereiten Sie sich auf eine kurze Präsentation von etwa fünf Minuten vor. Die schriftliche Ausarbeitung soll den fachlichen Hintergrund der Aufgaben in einem geeignetem Ausmaß beleuchen. Die Beispiele sind unterschiedlich im Schwierigkeitsgrad und im Aufwand. Das wird natürlich einerseits bei der Beurteilung berücksichtigt, andererseits sollten sich diese Unterschiede aber herausmitteln, da Sie ja mehrere Beispiele ausarbeiten werden. In den Übungsstunden besteht Anwesenheitspflicht.

Wenden Sie sich bei Unklarheiten oder Fragen an G. Schranz-Kirlinger oder M. Noya.

Kapitel 1: Fehlerbetrachtungen

1. Berechnen Sie
$$\int_0^1 \sin x \, \mathrm{d}x$$
mit Hilfe der Trapezregel für verschiedene Schrittweiten h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

2. Berechnen Sie
$$\int_0^1 \cos x \, \mathrm{d}x$$
mit Hilfe der Trapezregel für verschiedene Schrittweiten h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

3. Betrachten Sie die Konstruktion eines Verfahren (zur numerischen Differentiation) der Ordnung 4 aus der sogenannten *asymptotischen Entwicklung* des zentralen Differenzenquotienten. Sei also $f(x) = e^x$ und $x = 1$. Berechnen Sie
$$D(h) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$
und betrachten Sie weiters
$$D(h) - f'(1) = D(h) - e^1 = \frac{h^2}{6} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4)\,, \quad \text{siehe Skriptum}$$
$$D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1) = D\left(\frac{h}{2}\right) - e^1 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{6} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4) = \frac{h^2}{24} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4)\,.$$
Daraus folgt
$$\frac{1}{3}\left(D(h) - D\left(\frac{h}{2}\right)\right) = \frac{h^2}{24} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4) = \left(D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1)\right) + O(h^4)\,.$$
Der linke Ausdruck ist also eine Schätzung des Verfahrensfehlers $\left(D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1)\right)$ auf $O(h^4)$ Niveau. Aus dieser Abschätzung folgt direkt
$$f'(1) + \mathcal{O}(h^4) = \frac{4}{3} D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D(h)$$
also eine Approximation der Ordnung 4 für $f'(x)$.

   Erstellen Sie eine Tabelle der Form

$D(h)$	$D(h) - e^1$	$\frac{h^2}{6}\, e^1$	$\frac{D(h) - D(\frac{h}{2})}{3}$	$\frac{4}{3} D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D(h) - e^1$

   für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 2 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-9}$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

4. *Auswirkungen von Rechenfehlereffekten.* Berechnen Sie den Wert von $\ln(1+x)$ für $x = 0,1234567800 \cdot 10^{-7}$ in 10-stelliger Taschenrechnerarithmetik, dh. das Ergebnis jeder einzelnen Rechenoperation ist auf 10 Dezimalstellen genau, ebenso die Auswertung des natürlichen Logarithmus. Versuchen Sie das Resultat zu verstehen und analysieren Sie die Auswertung ganz allgemein mit der Maschinengenauigkeit ε. Verwenden Sie dabei, $\ln(1+q) \approx q$ für $|q| \ll 1$.

5. *Rundungsfehleranalyse.* Geben Sie eine detaillierte Rundungsfehleranalyse von

$$y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

   für $|x| \ll 1$ an, verwenden Sie dabei unter anderem $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ oder $y \approx \frac{1}{2}$.

6. Berechnen Sie numerisch mit Hilfe des *Differenzenquotienten* und des *zentralen Differenzenquotienten* die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

   an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ für verschiedene Werte von h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

7. Berechnen Sie numerisch mit Hilfe des *Differenzenquotienten* und des *zentralen Differenzenquotienten* die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \cos x$$

   an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ für verschiedene Werte von h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

8. Bearbeiten Sie das Thema *Gleitkommazahlen*; normalisierte Gleitkommadarstellung, subnormale Zahlen, etc... Schreiben Sie eine mehrseitige Zusammenfassung und gestalten Sie eine kurze Präsentation von maximal fünf Minuten.

9. *Auslöschung:* Werten Sie die beiden identen Algorithmen

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

   für verschieden Werte von x ($x \ll 1$, $x \gg 1$, ...) und mit verschiedenen Genauigkeiten aus.

10. Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 10 & 7.1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   und unter suchen Sie die Abhängigkeit der Lösung von der Genauigkeit bzw. Zahl der Dezimalstellen zur Darstellung der reellen Zahl $\sqrt{2}$.

11. Untersuchen Sie die Eigenschaften der äquivalenten Formeln (Satz von Vieta)

$$x = b - \sqrt{b^2 - c} \Longleftrightarrow x = \frac{c}{b + \sqrt{b^2 - c}}$$

   zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 2bx + c = 0,\ b, c \in \mathbb{R}$ für die Fälle $b^2 \gg c$ und $b^2 \approx c$ durch Einsetzen von konkreten Werten für b und c.

12. Schätzen Sie den relativen Rundungsfehler bei der Berechnung von

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

   durch die Analyse der Fehlerfortpflanzung ab und vergleichen Sie mit dem mathematisch äquivalenten Ausdruck $z = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Betrachten Sie verschiedene Werte von x, also etwa $x \approx 0$, x sehr groß....

13. Untersuchen Sie, welche der schrittweisen Möglichkeiten

$$(\sqrt{x})^3 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^3}$$

   zur Berechnung von $x^{\frac{3}{2}}$ einen geringeren Rundungsfehler ergibt.

14. Verwenden Sie die beiden Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \qquad\qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

und deren Eigenschaften um die Ableitung $f'(4533414141/111231321)$ für die Funktion $f(x) = x\sin x$ möglichst genau zu approximieren. Untersuchen Sie die dabei auftretenden Effekte und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, das Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktion erhalten. (Berechnen Sie die Differenzenquotienten für geeignete $h > 0$.)

15. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ sind bekannterweise

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bestimmen Sie die Kondition des Problems abhängig von den Parametern a, b, c. Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut?

16. Für die beiden Maschinenzahlen $r = \frac{7}{4}$ und $s = \frac{3}{8}$ soll die Summe $r + s$ mit 3-stelliger Mantisse und in Binärarithmetik berechnet werden. Geben Sie auch den absoluten und den relativen Fehler und die Maschinengenauigkeit ε an.

17. Berechnen Sie die Summe $y = a + b + c$ dreier Maschinenzahlen a, b und c. Zerlegen Sie die Gesamtrechnung in zwei Teilschritte und zwar $a + b$ und dann $(a + b) + c$ und analysieren Sie den Vorgang mit Hilfe der Rundungsfehleranalyse. Geben Sie den relativen Fehler an und schätzen Sie diesen geeignet ab. Berechnen Sie weiters die Summe $y = a + b + c$ auf folgende Art, zunächst $b + c$ und dann $a + (b + c)$. Vergleichen Sie auch die beiden relativen Fehler. Führen Sie die beiden Rechnungen mit $a = 1.11 \cdot 2^{-1}$, $b = -1.10 \cdot 2^{-1}$ und $c = 1.10 \cdot 2^{-3}$ (jeweils in Binärarithmetik mit dreistelliger Mantisse) aus und vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander und mit den relativen Fehlerabschätzungen.

18. Ermitteln Sie die Summe $y = a + b + c$ dreier Zahlen a, b und c, die mit den Rundungsgfehlern ε_a, ε_b und ε_c behaftet sind, indem Sie zunächst $a + b$ und dann $(a + b) + c$ berechnen. Geben Sie den relativen Fehler an und teilen Sie diesen in einen Teil, der die Verstärkung der Eingabefehler beschreibt und einen Teil der die Verstärkung der Rechenfehler beschreibt. Die Rechenfehler der beiden Additionen sind dabei ε_1 und ε_2.

19. *Auslöschung* Berechnen sie für die beiden reellen Zahlen $r = \frac{3}{5}$ und $s = \frac{4}{7}$ mit normierten, gerundeten Repräsentationen in Binärarithmetik und mit fünfstelliger Mantisse die Differenz $r - s$ und den relativen Fehler. Führen Sie die Rechnung auch mit dreistelliger Mantisse in Binärarithmetik aus. Analysieren Sie die Subtraktion für allgemeine Zahlen a und b, die mit den kleinen relativen Fehlern ε_a und ε_b behaftet sind, mit Hilfe der Rundungsfehleranalyse.

20. Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(x)$ mittels der Reihenentwicklung $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$. Addieren Sie solange Summanden der Form $y = \frac{x^k}{k!}$ mit $k > 0$ bis sich der Wert des Ergebnisses nicht mehr ändert. Wählen Sie verschiedene positive und negative reelle Werte für x und erstellen Sie eine Tabelle.

21. Mit der Konditionszahl $K_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ kann die Sensitivität des Resultats $y = f(x)$ in Bezug auf die Eingabe x gemessen werden.

    Berechnen Sie für das Problem $y = f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ die Konditionszahl. Diskutieren Sie, für welche Werte r schlechte / gute Kondition vorliegt. Berechnen Sie weiters jeweils die Konditionszahlen für die Funktionen $y = f(x) = \exp(x)$, $y = f(x) = \ln x$ und $y = f(a) = a + b + c$ (b und c sind konstant) und diskutieren Sie jeweils die Ergebnisse.

22. Analysieren Sie mit Hilfe der Rundungsfehleranalyse den Ausdruck $y = a^2 - b^2$. Berechnen Sie jeweils die Konditionszahlen bezüglich a und b. Für welchen Fall ist das Problem schlecht konditioniert? Zeigen Sie, dass für den relativen Fehler des Resultats gilt

$$\varepsilon_y = -\frac{2a^2}{a^2 - b^2}\,\varepsilon_a + \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\,\varepsilon_b - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\,\varepsilon_1 + \frac{b^2}{a^2 - b^2}\,\varepsilon_2 - \varepsilon_3\,,$$

dabei repräsentieren ε_a und ε_b die relativen Fehler in den Eingabedaten a und b und ε_1, ε_2 und ε_3 die relativen Fehler in den Berechnungen von $a \cdot a$, $b \cdot b$ und $a^2 - b^2$. Führen Sie die Analyse auch für den alternativen Berechnungsweg $(a + b)(a - b)$ durch. Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse. Welchen Berechnungsweg würden Sie empfehlen? Warum?

23. Werden die relativen Eingabefehler eines gut konditionierten Problems $y = f(x)$ durch ein Berechnungsverfahren nicht vergrößert, so heiß das Verfahren *(numerisch) stabil.* Ein Verfahren, das trotz kleiner Konditionszahl zu falschen Ergebnissen führen kann, heißt *(numerisch) instabil.*

    Der Ausdruck $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ soll für $x \approx 0$ berechnet werden. Zeigen Sie, dass es sich um ein gut konditioniertes Problem handelt. Bei der Auswertung dieses Ausdrucks erhält man allerdings Ergebnisse mit extrem großen relativen Rundungsfehlern. Bestätigen Sie das etwa mit einem Taschenrechner für $x = 1.0 \cdot 10^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Überlegen Sie wie dieses numerisch instabile Berechnungsverfahren in ein stabiles mathematisch äquivalentes Verfahren umgeformt werden kann, das den Effekt der Auslöschung umgeht.

24. Iterative Apporoximation der Zahl π:

$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (2^{-k} u_k)^2})}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

    Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.