106.054 AKNUM Computernumerik UE / 101.484 Computernumerik VU
106.986 Numerische Mathematik für LA Mathematik

1. Übungsblatt (Donnerstag 03/04/2014)

Bitte, bearbeiten Sie (mit MATLAB) (selbst ausgewählte) 8 *von den angegebenen* 10 *Beispielen und kreuzen Sie in der UE dann diejenigen Beispiele an, die Sie verstanden und durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können.*

Wenden Sie sich bei Unklarheiten an den Übungsleiter Michael Noya (`michael.noya@tuwien.ac.at`) *oder an G.Schranz-Kirlinger.*

1. Verwenden Sie Matlab um

$$\int_0^1 \cos x \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Trapezregel und der Simpsonregel für verschiedene Schrittweiten h zu berechnen. Vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehlers.
Hinweis: Die Ordnung k des Verfahrensfehler verfiziert man experimentell indem man nachweist, dass der Fehler $r(h)$ für $h \to 0$ genauso schnell gegen 0 konvergiert wie h^k. In Matlab plottet man dafür $r(h)$ und h^k in einem loglog-Plot und vergleicht.

2. Betrachten Sie die Konstruktion eines Verfahren (zur numerischen Differentiation) der Ordnung 4 aus der sogenannten *asymptotischen Entwicklung* des zentralen Differenzenquotienten. Sei also $f(x) = e^x$ und $x = 1$. Berechnen Sie

$$D(h) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$

und betrachten Sie weiters

$$D(h) - f'(1) = D(h) - e^1 = \frac{h^2}{6} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4)\,, \quad \text{siehe Skriptum}$$
$$D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1) = D\left(\frac{h}{2}\right) - e^1 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{6} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4) = \frac{h^2}{24} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4)\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{3}\left(D(h) - D\left(\frac{h}{2}\right)\right) = \frac{h^2}{24} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4) = \left(D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1)\right) + O(h^4)\,.$$

Der linke Ausdruck ist also eine Schätzung des Verfahrensfehlers $\left(D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1)\right)$ auf $O(h^4)$ Niveau. Aus dieser Abschätzung folgt direkt

$$f'(1) + \mathcal{O}(h^4) = \frac{4}{3} D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D(h)$$

also eine Approximation der Ordnung 4 für $f'(x)$.

Erstellen Sie eine Tabelle der Form

$D(h)$	$D(h) - e^1$	$\frac{h^2}{6}\, e^1$	$\frac{D(h) - D(\frac{h}{2})}{3}$	$\frac{4}{3} D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D(h) - e^1$

für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 2 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-9}$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

3. Mit der Konditionszahl $K_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ kann die Sensitivität des Resultats $y = f(x)$ in Bezug auf die Eingabe x gemessen werden.

Berechnen Sie für das Problem $y = f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ die Konditionszahl. Diskutieren Sie, für welche Werte r schlechte / gute Kondition vorliegt. Berechnen Sie weiters jeweils die Konditionszahlen für die Funktionen $y = f(x) = \exp(x)$, $y = f(x) = \ln x$ und $y = f(a) = a + b + c$ (b und c sind konstant) und diskutieren Sie jeweils die Ergebnisse.

4. *Auswirkungen von Rechenfehlereffekten.* Berechnen Sie den Wert von $\ln(1+x)$ für $x = 0,1234567800 \cdot 10^{-7}$ in 10-stelliger Taschenrechnerarithmetik, dh. das Ergebnis jeder einzelnen Rechenoperation ist auf 10 Dezimalstellen genau, ebenso die Auswertung des natürlichen Logarithmus. Versuchen Sie das Resultat zu verstehen und analysieren Sie die Auswertung ganz allgemein mit der Maschinengenauigkeit ε. Verwenden Sie dabei, $\ln(1+q) \approx q$ für $|q| \ll 1$.

5. Berechnen Sie numerisch (verwenden Sie Matlab) mit Hilfe des *Differenzenquotienten* und des *zentralen Differenzenquotienten* die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ für verschiedene Werte von h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

6. Untersuchen Sie die Eigenschaften der äquivalenten Formeln (Satz von Vieta)

$$x = b - \sqrt{b^2 - c} \Longleftrightarrow x = \frac{c}{b + \sqrt{b^2 - c}}$$

zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 2bx + c = 0,\ b, c \in \mathbb{R}$ für die Fälle $b^2 \gg c$ und $b^2 \approx c$ durch Einsetzen von konkreten Werten für b und c.

7. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ sind bekannterweise

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bestimmen Sie jeweils die Kondition des Problems in Abhängigkeit von a, b und c, indem Sie jeweils einen der Parameter als variabel und die anderen beiden Parameter als fest annehmen. . Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut?

8. *Auslöschung* Berechnen sie für die beiden reellen Zahlen $r = \frac{3}{5}$ und $s = \frac{4}{7}$ mit normierten, gerundeten Repräsentationen in Binärarithmetik und mit fünfstelliger Mantisse die Differenz $r - s$ und den relativen Fehler. Führen Sie die Rechnung auch mit dreistelliger Mantisse in Binärarithmetik aus. Analysieren Sie die Subtraktion für allgemeine Zahlen a und b, die mit den kleinen relativen Fehlern ε_a und ε_b behaftet sind, mit Hilfe der Rundungsfehleranalyse.

9. Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(x)$ mittels der Reihenentwicklung $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$ Addieren Sie solange Summanden der Form $y = \frac{x^k}{k!}$ mit $k > 0$ bis sich der Wert des Ergebnisses nicht mehr ändert. Wählen Sie verschiedene positive und negative reelle Werte für x und erstellen Sie eine Tabelle.

10. Iterative Apporoximation der Zahl π:

$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (2^{-k} u_k)^2})}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.