AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

2. Übungsblatt (Donnerstag, 15/5/2014)

Bitte, bearbeiten Sie (mit MATLAB) alle 7 Beispiele und kreuzen Sie in der UE dann diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie auch den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop vor, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können.

Wenden Sie sich bei Unklarheiten an den Übungsleiter Michael Noya (`michael.noya@tuwien.ac.at`) *oder an G.Schranz-Kirlinger* (`g.schranz-kirlinger@tuwien.ac.at`).

1. *Kondition.*

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\kappa(A)$, $\kappa(B)$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

für mindestens zwei verschiedene Normen.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Parameterdarstellung

$$g_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Berechnen Sie die exakte Lösung und die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Koeffizientenmatrix A des zu lösenden Gleichungssystems, geben Sie eine geometrische Interpretation.
Betrachten Sie auch die Umskalierung der beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 200,0 \\ 100,0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,45 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,0045 \end{pmatrix}$$

und erläutern Sie die Auswirkungen.

2. Lösen und untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme $A_i\vec{x} = \vec{b}$, mit $i = 1, 2$ und den beiden Koeffizientenmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

und jeweils der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Inhomogenität mit Störung $\tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.99999 \\ 1.00001 \end{pmatrix}$.

3. *LU-Zerlegung.* Führen Sie eine LU-Zerlegung ohne bzw. mit Zeilentausch für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der 2×2-Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 2.25 \\ 0.50 & 4.00 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5.000011111 \\ 9.444444444 \end{pmatrix}$$

in 5-stelliger Dezimalrechnung durch. Berechnen Sie $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

4. *Gauß'sches Eliminationsverfahren.* Lösen Sie ohne Rechnerunterstützung das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß Algorithmus einmal ohne Pivotsuche und einmal mit Pivotsuche. Verwenden Sie dabei jeweils eine dreistellige dezimale Gleitpunktarithmetik.

5. *Gauß'sches Eliminationsverfahren.* Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das den Gauß Algorithmus einmal ohne Pivot und einmal mit Spaltenpivot durchführt. Testen Sie das Programm anhand des Beispiels $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad b_i = \frac{1}{N+i-1}, \quad i,j = 1,2,...,N$$

Geben Sie jeweils für $N = 10, 25, 50, 100$ die Werte des Lösungsvektors $\vec{x}$ an.

6. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$.
- Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1,1)^T$, $\Delta\vec{b}_1 = (\delta,\delta)^T$ und $\Delta\vec{b}_2 = (\delta,-\delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$, $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_1) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_1$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_2) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_2$. Vergleichen Sie die jeweiligen relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta\vec{x}_2\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

mit der allgemeinen Fehlerschätzung

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

7. Bestimmen Sie zu den Stützpunkten

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
f_j	0	1	2	0

dasjenige Polynom $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ zweiten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$E(p) = \sum_{j=0}^{3} (p(x_j) - f_j)^2$$

minimiert.

Hinweis: Lösen Sie die zugehörigen Normalgleichungen.