

3. Übungsblatt (Dienstag 20/5/2014)

Bitte, bearbeiten Sie (mit MATLAB) alle 7 Beispiele und kreuzen Sie in der UE dann diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie auch den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop vor, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können.

Wenden Sie sich bei Unklarheiten an den Übungsleiter Michael Noya (michael.noya@tuwien.ac.at) oder an G.Schranz-Kirlinger (g.schranz-kirlinger@tuwien.ac.at).

1. Bestimmen Sie die Nullstelle x^* von

$$F(x) = x - e^{-x},$$

$x \in [0.5, 0.69]$ auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedene Startwerte.

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Nullstelle von $F(x) = \arctan x$, verwenden Sie auch das gedämpfte Newtonverfahren mit geeigneten Dämpfungsfaktoren λ . Probieren Sie verschiedene Startwerte und versuchen Sie die Grenzen des Einzugsbereichs herauszufinden.

3. Iterative Approximation der Zahl π :

$$u_1 := 2, \quad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (2^{-k}u_k)^2})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

4. (a) Zeigen Sie, dass die Iteration $x_{n+1} = \cos x_n$ für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt χ , $\chi = \cos \chi$, konvergiert, d.h. es ist die Eindeutigkeit des Fixpunktes (Kontraktion) und die Konvergenz des Verfahrens zu zeigen.
(b) Formulieren Sie das Newtonverfahren zur Berechnung von χ . Konvergiert dieses Verfahren ebenfalls für jeden Startwert?
(c) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens und des Newtonverfahrens.
5. Gegeben sei die Gleichung $x + \ln x = 0$ deren eindeutige Lösung im Intervall $[0.5, 0.6]$ liegt. Betrachten Sie zur approximativen Lösung dieser Gleichung die folgenden drei Iterationsverfahren

$$x_{n+1} := -\ln(x_n), \quad x_{n+1} := \exp(-x_n), \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$$

zu verschiedenen Startwerten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

6. Die Funktion $\ln x$ soll an der Stelle $x = a > 0$ näherungsweise berechnet werden. Das kann z.B. mit dem Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion

$$F(x) = e^x - a$$

geschehen. Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an und weisen Sie experimentell die quadratische Konvergenz nach. Berechnen Sie für $a = 1$ und $a = 2$ und verschiedene Startwerte x_0 jeweils einige Iterierte x_1, x_2, \dots, x_n .

7. Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB die zwei Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2 &= 0 \\ u^3 - v^2 &= 0 \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich auch anhand einer Skizze oder eines Plots, dass das nichtlineare Gleichungssystem genau zwei Lösungen hat. Wenden Sie das Newtonverfahren zur Berechnung der beiden Lösungen an, indem Sie jeweils geeignete Startvektoren aussuchen.