AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

3. Übungsblatt (Donnerstag 22/5/2014)

Bitte, bearbeiten Sie (mit MATLAB) alle 7 Beispiele und kreuzen Sie in der UE dann diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie auch den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop vor, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können.

Wenden Sie sich bei Unklarheiten an den Übungsleiter Michael Noya (`michael.noya@tuwien.ac.at`) *oder an G.Schranz-Kirlinger* (`g.schranz-kirlinger@tuwien.ac.at`).

1. Berechnen Sie die Nullstelle x^* für die Funktion $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedende Startwerte.

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Nullstelle von $F(x) = \arctan x$, verwenden Sie auch das gedämpfte Newtonverfahren mit geeigneten Dämpfungsfaktoren λ. Probieren Sie verschiedene Startwerte und versuchen Sie die Grenzen des Einzugsbereichs herauszufinden.

3. Iterative Apporoximation der Zahl π:

$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (2^{-k} u_k)^2})}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

4. (a) Zeigen Sie, dass die Iteration $x_{n+1} = \cos x_n$ für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt χ, $\chi = \cos \chi$, konvergiert, d.h. es ist die Eindeutigkeit des Fixpunktes (Kontraktion) und die Konvergenz des Verfahrens zu zeigen.

(b) Formulieren Sie das Newtonverfahren zur Berechnung von χ. Konvergiert dieses Verfahren ebenfalls für jeden Startwert?

(c) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens und des Newtonverfahrens.

5. Gegeben sei die Gleichung $x + \ln x = 0$ deren eindeutige Lösung im Intervall $[0.5, 0.6]$ liegt. Betrachten Sie zur approximativen Lösung dieser Gleichung die folgenden drei Iterationsverfahren

$$x_{n+1} := -\ln(x_n), \quad x_{n+1} := \exp(-x_n), \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$$

zu verschiedenen Startwerten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

6. Die Funktion $\ln x$ soll an der Stelle $x = a > 0$ nährerungsweise berechnet werden. Das kann z.B. mit dem Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion

$$F(x) = e^x - a$$

geschehen. Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an und weisen Sie experimentell die quadratische Konvergenz nach. Berechnen Sie für $a = 1$ und $a = 2$ und verschiedene Startwerte x_0 jeweils einige Iterierte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

7. Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$uv + u - v - 1 = 0$$

$$uv = 0$$

Bestimmen Sie die exakten Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems. Wenden Sie das Newtonverfahren zur Berechnung der beiden Lösungen an, indem Sie jeweils geeignete Startvektoren aussuchen.