AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

---

4. Übungsblatt (Donnerstag 5/6/2014)

---

1. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \cos x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie händisch eine Polynominterpolation $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{5}$ an (dafür ist der Computer erlaubt):

(a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \pi$

(b) Polynom vom Grad 2: $x_0, x_1, x_2 = \frac{\pi}{2}$

(c) Polynom vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$

(d) Theoretische Abschätzung des Interpolationsfehlers für (c) an der Stelle $\frac{\pi}{5}$

(e) Welchen Vorteil bietet die Newtondarstellung des Interpolationspolynoms?

(f) gerades Polynom 4. Grades durch x_0, x_1, x_2 und vergleichen Sie den Fehler bei $\frac{\pi}{5}$ mit dem Fehler beim Polynom vom Grad 2. Warum ist hier die Wahl eines geraden Polynoms sinnvoll?

2. Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion $f(x) = x \sin x$, indem Sie 5 Werte für h (etwa 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005,0.0001) wählen und für die Ableitung von f das Interpolationspolynom durch diese Werte bei 0 auswerten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen bei Berechnung mit dem einseitigen und dem zentralen Differenzenquotienten.

3. Berechnen Sie händisch das Hermitsche Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützpunkten

$$(-1, 1)\,,\ (0, 2)\,,\ (1, 3) \ \text{ mit } \ f'(0) = 2 \ \text{ und } \ f''(0) = 2$$

.

4. Interpolieren Sie mithilfe von Matlab die Funktion von Runge

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$$

auf $[-1, 1]$ auf zwei Arten für $n = 20$:

(a) Äquidistanten Punkten $x_j = -1 + \frac{2j}{n} \quad j = 0, 1, \ldots, n$

(b) An den Nullstellen des $n + 1$-ten Tschebyscheff Polynoms T_{n+1}

5. Approximieren händisch Sie die Funktion $f(x) = \log_2(x)$.

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit den Stützstellen 16, 32 und 64.

(b) Bestimmen Sie die lineare Ausgleichsgerade zu diesen Stützstellen und vergleichen Sie sie mit dem Interpolationspolynom aus (a).

6. Gegeben sind die vier Stützpunkte $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, -1)$ und $(9, 0)$. Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB ein interpolierendes Polynom $p(x)$ sowie die Funktionswerte $p(0.5)$, $p(2.5)$ und $p(6.5)$. Zeichnen Sie unter Verwendung von Matlab die Stützpunkte und $p(x)$ im Intervall $[0, 9]$.

7. Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion $\omega(\bar{x}) = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)...(\bar{x} - x_n)|$ ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max_{0 \le \bar{x} \le 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.

8. Betrachten Sie ein einfaches Approximationsproblem in anderen Normen: Es soll diejenige Gerade $y(x) = ax + b$ bestimmt werden, die von den Punkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(0.5, 0.25)$ den kleinsten Abstand in der Maximumsnorm

$$\min_{a,b}\{\max\{|b|, |a + b - 1|, |0.5a + b - 0.25|\}\}\,,$$

und in der 1-Norm hat

$$\min_{a,b}\{|b| + |a + b - 1| + |0.5a + b - 0.25|\}\,.$$

Man kann jeweils durch eine Fallunterscheidung die optimalen Werte für a un b betimmen. Eine graphische Überlegung könnte auch hilfreich sein.