

Um die Koeffizienten eines Polynoms in der Monom-Basis zu erhalten, kann folgendes Vorgehen über die Lagrange-Interpolation benutzt werden.

1. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Lagrange-Basispolynome in der Monom-basis.

Anleitung: Das i -te Lagrange-Basispolynom φ_i ist gegeben durch

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{1}{x_i - x_j} \cdot x - \frac{x_j}{x_i - x_j} \right).$$

Es lässt sich daher dadurch berechnen, dass das konstante Polynom 1 mit den Polynomen $\frac{1}{x_j - x_i} \cdot x - \frac{x_i}{x_j - x_i}$ iterativ zum gewünschten φ_i aufmultipliziert wird.

Das lässt sich technisch am einfachsten realisieren, indem nur die Koeffizienten zwischengespeichert werden und jede der Multiplikationen mittels der MATLAB-Funktion `conv` durchgeführt wird. Dadurch erhält man abschließend die Darstellung in der Monom-Basis

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=0}^n c_{ij} x^j.$$

2. Die Koeffizienten lassen sich anschließend leicht bestimmen. Da das gewünschte Interpolationspolynom die Darstellung

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

und die φ_i die oben berechneten Darstellungen besitzen, ergibt sich

$$a_j = \sum_{i=0}^n f(x_i) c_{ij},$$

was genau den gesuchten Koeffizienten in der Monombasis entspricht.

Implementieren Sie dieses Vorgehen, indem Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [c] = lagrange(x,y)` programmieren, wobei x der Vektor der Stützstellen, y der Vektor der Stützwerte und c der resultierende Koeffizientenvektor in der Monombasis sei.

Vergleichen Sie Ihre Funktion mit dem Berechnen der Koeffizienten durch Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$. Dabei bezeichnet A die Vandermonde-matrix (*Hinweis:* MATLAB-Funktion `vander`), wobei die Funktion $\ln x$ an den Stützstellen 0.1, 0.5, 0.6, 1, 2 interpoliert werden soll.