AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

---

1. Übungsblatt (Dienstag 21.04.2015)

Kreuzen Sie in der Übung diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie alle numerische Beispiele mit MATLAB und bringen Sie den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können. Wenden Sie sich bei Unklarheiten an Caroline Geiersbach (`caroline.geiersbach@tuwien.ac.at`) *oder an Stefan Wurm* (`stefan.wurm@tuwien.ac.at`).

1. Verwenden Sie MATLAB um
$$\int_0^1 \sin x \, \mathrm{d}x$$
mit Hilfe der Trapezregel für verschiedene Schrittweiten h zu berechnen. Vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehlers.

   Hinweis: Die Ordnung k des Verfahrensfehler verfiziert man experimentell indem man nachweist, dass der Fehler $r(h)$ für $h \to 0$ genauso schnell gegen 0 konvergiert wie h^k. Plotten und vergleichen Sie dafür $r(h)$ und h^k in einem loglog-Plot.

2. Mit der Konditionszahl $K_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ kann die Sensitivität des Resultats $y = f(x)$ in Bezug auf die Eingabe x gemessen werden.

   Berechnen Sie für das Problem $y = f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ die Konditionszahl. Diskutieren Sie, für welche Werte von r schlechte / gute Kondition vorliegt. Berechnen Sie weiters jeweils die Konditionszahlen für die Funktionen $y = f(x) = \exp(x)$ und $y = f(x) = \ln x$ und diskutieren Sie jeweils die Ergebnisse.

3. *Rundungsfehleranalyse.* Geben Sie eine detaillierte Rundungsfehleranalyse von
$$y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$
für $|x| \ll 1$ an, verwenden Sie dabei $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

4. *Konditionsanalyse.* Berechnen Sie die relative Konditionszahl $K_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ von
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$
und versuchen Sie eine Abschätzung für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ anzugeben (entweder durch analytische Überlegungen oder berechnen von Werten in Matlab...). Gesucht ist also eine von x unabhängige (möglichst kleine) Konstante C, so dass $K_x < C$ für alle $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt.

5. Berechnen Sie numerisch mit Hilfe des *Differenzenquotienten* und des *zentralen Differenzenquotienten* die Ableitung der Funktion
$$f(x) = \cos x$$
an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ für verschiedene Werte von h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

6. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ sind bekannterweise
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Bestimmen Sie jeweils die Kondition des Problems in Abhängigkeit von a, b und c, indem Sie jeweils einen der Parameter als variabel und die anderen beiden Parameter als fest annehmen. Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut?

7. Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(x)$ sowohl mittels der Reihenentwicklung $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, als auch mittels der Approximation $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$. Addieren Sie solange Summanden der Form $y = \frac{x^k}{k!}$ mit $k > 0$ bzw. berechnen Sie den Ausdruck $(1 + \frac{x}{n})^n$ bis sich der Wert des Ergebnisses nicht mehr ändert. Wählen Sie verschiedene positive und negative reelle Werte für x und erstellen Sie jeweils eine Tabelle. Welche Approximation ist (für welche Werte) zu bevorzugen?

8. *Argumentreduktion* Um die Funktion $\sin x$ numerisch für alle Argumente $x \in \mathbb{R}$ zu implementieren, reicht es theoretisch aus, die Funktionswerte für alle Argumente $x \in (-\pi, \pi]$ berechnen zu können. Für alle restlichen $x \in \mathbb{R}$ können durch Ausnutzung der Periodizität die Funktionswerte mittels $\overline{\sin}(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ gefunden werden. Dabei wird $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $x + k \cdot 2\pi \in (-\pi, \pi]$ gilt.

   Implementieren Sie in Matlab dieses Vorgehen, d.h. erstellen Sie eine Funktion `sinred(x)`, die für gegebenes `x` dieses geeignete k findet und anschließend $\overline{\sin}(x)$ berechnet und zurückgibt. Testen Sie Ihr Programm, indem sie damit die Werte $s_1 = \overline{\sin}(312689)$ und $s_2 = \overline{\sin}(312690)$ berechnen und anschließend die relativen Fehler $\frac{\sin(312689)-s_1}{\sin(312689)}$ und $\frac{\sin(312690)-s_2}{\sin(312690)}$ vergleichen. Wie können die Ergebnisse erklärt bzw. interpretiert werden?

9. Gegeben sei eine Folge x_n, welche die Bedingungen

$$\left|x_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \left|x_n - \frac{1}{2}\right|^2, \quad x_0 = 1$$

   erfülle. Diese Folge konvergiert offensichtlich gegen $\frac{1}{2}$. Gehen Sie nun davon aus, dass die Abweichungen $|x_n - \frac{1}{2}|$ als nicht-normalisierte Gleitkommazahlen mit doppelter Genauigkeit abgespeichert (nicht berechnet!) werden (64 Bits, gemäß *IEEE 754-2008*). Ab welchem Folgenindex n werden diese Abweichungen sicher nur mehr als $\overline{0}$ gespeichert?

   Konstruieren Sie selbst eine Testfolge, die den Bedingungen genügt, und überprüfen Sie das Ergebnis in Matlab.

   Hinweis: Bringen Sie zuerst in Erfahrung, unter welcher Bedingung eine Zahl als $\overline{0}$ gespeichert wird: beachten Sie dabei, dass bei nicht-normalisierten Gleitkommazahlen alle Stellen bis auf die letzte der Mantisse 0 sein können. Das bedeutet, dass die kleinste darstellbare Zahl $\tilde{x}_{min} = x_{min} \cdot 2^{-\text{ Mantissenlänge}}$ ist, wenn x_{min} die kleinste darstellbare normalisierte Gleitkommazahl bezeichnet.

   Überlegen Sie sich anschließend durch wiederholte Anwendung der rekursiven Bedingung eine Abschätzung von $|x_n - \frac{1}{2}|$, die nur von n, jedoch nicht von anderen Folgengliedern abhängt.

   Matlab speichert kleine Zahlen standardmäßig nicht-normalisiert in doppelter Genauigkeit.

10. Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = (1 - x)^6.$$

   Berechnen Sie zunächst die relative Konditionszahl $K_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ und werten Sie diese bei $x = 0.9$ aus. Welche Fehlerverstärkung erwarten Sie somit bei einer stabilen Auswertungsvariante an der Stelle $x = 0.9$?

   Berechnen Sie anschließend $p(0.9)$ in Matlab durch direkte Auswertung (also $y_1 = (1-0.9)^6$), durch Auswertung des expandierten Polynoms $y_2 = 1 - 6 \cdot 0.9 + 15 \cdot 0.9^2 - 20 \cdot 0.9^3 + 15 \cdot 0.9^4 - 6 \cdot 0.9^5 + 0.9^6$ und durch Anwenden des Horner-Schemas $y_3 = 1 + 0.9 \cdot (-6 + 0.9 \cdot (15 + 0.9 \cdot (-20 + 0.9 \cdot (15 + 0.9 \cdot (-6 + 0.9)))))$.

   Vergleichen Sie die relativen Fehler $\left|\frac{10^{-7} - y_i}{10^{-7}}\right| = |1 - 10^7 y_i|$ und versuchen Sie das Ergebnis zu erklären.