AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

---

2. Übungsblatt (Donnerstag 23.04.2015)

Kreuzen Sie in der Übung diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie alle numerische Beispiele (*) mit MATLAB und bringen Sie den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können. Auch bei Beispielen ohne (*) ist die Verwendung von MATLAB manchmal nützlich. Wenden Sie sich bei Unklarheiten an Stefan Wurm (`stefan.wurm@tuwien.ac.at`) *oder an Caroline Geiersbach* (`caroline.geiersbach@tuwien.ac.at`).

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$
   - Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty$.
   - Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1,1)^T$, $\Delta\vec{b}_1 = (\delta,\delta)^T$ und $\Delta\vec{b}_2 = (\delta,-\delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$, $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_1) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_1$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_2) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_2$. Vergleichen Sie die jeweiligen relativen Fehler
$$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta\vec{x}_2)\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$
     mit der allgemeinen Fehlerschätzung
$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

2. Sei A aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie die Konditionszahl in der Norm $\|\cdot\|_1$.

3. (*) *Gauß'sches Eliminationsverfahren.*
   Man schreibe ein MATLAB-Programm, das den Gauß Algorithmus einmal ohne Pivotsuche und einmal mit Spaltenpivotsuche durchführt. Testen Sie das Programm anhand des Beispiels $A\vec{x} = \vec{b}$ mit
$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad b_i = \frac{1}{N+i-1}, \quad i,j = 1,2,...,N$$
   Geben Sie jeweils für $N = 10, 25, 50, 100$ die Werte des Lösungsvektors $\vec{x}$ an.

4. (*) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Rangbestimmung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $m \geq n$. Erzeugen Sie dazu mit dem Gaußschen Algorithmus ein Schema, aus dem Sie den Rang „ablesen" können. Nutzen Sie dieses Programm, um zu entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem lösbar ist. Vergleichen Sie mit dem in MATLAB vorhandenen Befehl `rank`.

5. (*) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcr} 1.537 & = & 0.00001x & + & 1.536y \\ 0.712 & = & 0.08135x & - & 7.423y \end{array}.$$
   Bestimmen Sie die exakte Lösung mittels MATLAB. Führen Sie anschließend eine Gaußelimination ohne Pivotsuche per Hand durch, wobei alle Zwischenergebnisse auf 4 Dezimalstellen in Gleitpunktarithmetik gerundet werden sollen, und vergleichen Sie die Ergebnisse. Durch welches numerische Phänomen aus Kapitel 1 lässt sich dieses Resultat erklären?

6. Für das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, gegeben durch

$$\begin{array}{rcrcr} 217 & = & 780x & + & 563y \\ 254 & = & 913x & + & 659y \end{array}$$

sind zwei Näherungslösungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ -0.999 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7074 \\ -0.5946 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für beide Näherungen die Norm der Residuen $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2$. Welche Lösung würden Sie deshalb als exakter einstufen? Bestimmen Sie noch die exakte Lösung und erklären Sie was passiert.

7. Berechnen Sie mittels Gaußelimination ohne Pivotisierung die LU-Zerlegung von

$$A_c = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & c & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

also berechnen Sie eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix U, so dass $A_c = LU$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist diese durchführbar? Wann ist A_c regulär?

8. (*) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Erzeugung einer LU-Zerlegung ohne Pivotisierung. Vergleichen Sie dieses mit dem MATLAB eigenen Programm zur LU-Zerlegung indem Sie beides auf die Matrix A_c für verschiedene $c \in \mathbb{R}$ aus Aufgabe 7 anwenden.

9. (*) In den Lehrunterlagen in TISS steht eine Datei `ue2_9_do.csv` für Sie zum Downloaden bereit. Importieren Sie die Datei in MATLAB. Interpretieren Sie die erste Spalte als N Stützstellen x_j und die zweite Spalte als dazugehörige Funktionswerte f_j.

   Bestimmen Sie zu den Stützpunkten dasjenige Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x$ ersten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{j=1}^{N} (p(x_j) - f_j)^2$$

   minimiert.

   Hinweis: Bemerkung auf Seiten 49-50, Matlab Befehl `csvread`.

10. Zeigen Sie, dass die Gaußelimination mit Pivotsuche $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$ Multiplikationen und Divisionen für eine $n \times n$ Matrix benötigt.