AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

---

3. Übungsblatt (Dienstag 05.05.2015)

Kreuzen Sie in TUWEL (jeweils bis Dienstag 11.30) diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie alle numerische Beispiele (*) mit MATLAB vor und bringen Sie den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können. Auch bei Beispielen ohne (*) ist die Verwendung von MATLAB manchmal nützlich. Wenden Sie sich bei Unklarheiten an Stefan Wurm (`stefan.wurm@tuwien.ac.at`) *oder an Caroline Geiersbach* (`caroline.geiersbach@tuwien.ac.at`).

1. (*) Lösen Sie mittels Fixpunktiteration die Gleichung
$$\arcsin\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{3}{4x}\,,$$
indem Sie diese vorher als geeignete Fixpunktabbildung formulieren.

2. (*) Informieren Sie sich über das Bisektionsverfahren und das Sekantenverfahren und implementieren Sie beide in MATLAB. Testen Sie ihren Code anhand des Beispiels $x^3 - \frac{1}{2}$ für verschiedene Startwerte. Wie viele Iterationsschritte werden jeweils benötigt?

3. Zeigen Sie, dass die Iteration $x_{n+1} = \cos x_n$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt χ, $\chi = \cos\chi$, konvergiert.
   (a) Formulieren Sie das Newtonverfahren zur Berechnung von χ. Konvergiert dieses Verfahren ebenfalls für jeden Startwert?
   (b) (*) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit der beiden Iterationsverfahren.

4. (*) Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens die Nullstelle von $f(x) = \arctan x$, verwenden Sie auch das gedämpfte Newtonverfahren mit geeigneten Dämpfungsfaktoren. Probieren Sie verschiedene Startwerte und versuchen Sie die Grenzen des Einzugsbereichs herauszufinden. Was passiert, wenn eine der beiden Grenzen des Konvergenzbereichs als Startwert gewählt wird?

5. (*) Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} uv + u - v - 1 &= 0 \\ uv &= 0 \end{aligned}$$
   (a) Bestimmen Sie die exakten Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems.
   (b) Führen Sie für die Startwerte $x_0 = (0,0)^T$ und $x_0 = (1,1)^T$ jeweils den ersten Iterationsschritt des Newtonverfahrens durch.

6. (*) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + (3-\varepsilon^2)x + \varepsilon^2 - 1$. Gehen Sie folgendermaßen vor, um die drei Nullstellen des Polynoms zu bestimmen:
   (a) Bestimmen Sie die erste Nullstelle x_1 durch Anwendung des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert.
   (b) Dividieren Sie das ursprüngliche Polynom durch $(x-x_1)$ und wiederholen Sie Punkte (a) und (b) sinngemäß bis alle Nullstellen gefunden sind.

   Vergleichen Sie die gefundenen Lösungen mit den von Ihnen berechneten exakten Nullstellen. Testen Sie für verschiedene ε.
   Hinweis: Speichern Sie das Polynom als Koeffizientenvektor. Verwenden Sie die MATLAB Befehle POLYVAL, POLYDER, DECONV. Eine exakte Nullstelle lautet 1, die restlichen können Sie durch Polynomdivision und quadratischer Lösungsformel berechnen.

7. (*) Betrachten Sie wieder das Polynom aus Aufgabe 6. Eine alternative Methode zur Berechnung der Nullstellen ist folgende: Für ein Polynom mit Nullstellen x_1, x_2, x_3 der Form $p(x) = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$ gelten nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Vieta die folgenden Gleichungen:
$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ c_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$
   Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems.

8. (*) Laut einer Studie wurde folgender Zusammenhang zwischen dem Druck und Volumen einer Erdgaslagerstätte festgestellt:

$$V = p^{-1.5}\left[\frac{p - 1/(1+k)}{1 - 1/(1+k)}\right]^b ,$$

wobei $b = 1.5k/(1+k), p =$Druck, $V =$ Volumen, $k = 1.06315$. Sinkt der Druck unter einen gewissen Wert, wird der Abbau des Erdgases nicht mehr ökonomisch. Bestimmen Sie diesen Wert des Druckes bei dem das Volumen nur mehr $V = 0.15$ beträgt.
Hinweis: Sekantenverfahren für das Startintervall $[1, 2]$, siehe Aufgabe 2.