AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

---

3. Übungsblatt (Donnerstag 07.05.2015)

Kreuzen Sie in TUWEL (jeweils bis Donnerstag 12.00) diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie alle numerische Beispiele (*) mit MATLAB vor und bringen Sie den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können. Auch bei Beispielen ohne (*) ist die Verwendung von MATLAB manchmal nützlich. Wenden Sie sich bei Unklarheiten an Stefan Wurm (`stefan.wurm@tuwien.ac.at`) *oder an Caroline Geiersbach* (`caroline.geiersbach@tuwien.ac.at`).

1. (*) Finden Sie mittels Fixpunktiteration *auf zwei verschiedenen Arten* die Nullstellen der Funktion

$$F(x) = 2 - x^2 - e^x.$$

Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 0.5$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.

2. (*) Informieren Sie sich über das Bisektionsverfahren und das Sekantenverfahren und implementieren Sie beide in MATLAB. Testen Sie ihren Code anhand des Beispiels $x^3 - 3x^2 + 2x$ für die Nullstelle $x_0 = 1$ mit verschiedenen Startwerten. Berechnen Sie in jedem Schritt den absoluten Fehler und plotten Sie anschließend den Fehlerverlauf in einem Semilogarithmischen Plot.

3. (*) Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens die Nullstelle von $f(x) = \arctan x$, verwenden Sie auch das gedämpfte Newtonverfahren mit geeigneten Dämpfungsfaktoren. Probieren Sie verschiedene Startwerte und versuchen Sie die Grenzen des Einzugsbereichs herauszufinden. Was passiert, wenn eine der beiden Grenzen des Konvergenzbereichs als Startwert gewählt wird?

4. (*) Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB die zwei Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2 &= 0 \\ u^3 - v^2 &= 0 \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich auch anhand einer Skizze oder eines Plots, dass das nichtlineare Gleichungssystem genau zwei Lösungen hat. Wenden Sie das Newtonverfahren zur Berechnung der beiden Lösungen an, indem Sie jeweils geeignete Startvektoren aussuchen.

5. (*) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 + 9x^2 + (27 - 4\varepsilon^2)x + 27 - 12\varepsilon^2$. Gehen Sie folgendermaßen vor, um die drei Nullstellen des Polynoms zu bestimmen:

   (a) Bestimmen Sie die erste Nullstelle x_1 durch Anwendung des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert.

   (b) Dividieren Sie das ursprüngliche Polynom durch $(x - x_1)$ und wiederholen Sie Punkte (a) und (b) sinngemäß bis alle Nullstellen gefunden sind.

Vergleichen Sie die gefundenen Lösungen mit den von Ihnen berechneten exakten Nullstellen. Testen Sie für verschiedene ε.
Hinweis: Speichern Sie das Polynom als Koeffizientenvektor. Verwenden Sie die MATLAB Befehle POLYVAL, POLYDER, DECONV. Eine exakte Nullstelle lautet -3, die restlichen können Sie durch Polynomdivision und quadratischer Lösungsformel berechnen.

6. (*) Betrachten Sie wieder das Polynom aus Aufgabe 6. Eine alternative Methode zur Berechnung der Nullstellen ist folgende: Für ein Polynom mit Nullstellen x_1, x_2, x_3 der Form $p(x) = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$ gelten nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Vieta die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ c_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems.

7. Zeigen Sie folgendes Konvergenzresultat des Newton-Verfahrens:

$$x^* - x_{n+1} = -(x^* - x_n)^2 \frac{F''(\xi_n)}{2F'(x_n)}, \qquad \xi_n \text{ zwischen } x_n \text{ und } x^* \tag{1}$$

   wobei x^* eine Nullstelle von $F(x)$ ist, gegen die das Newtonverfahren konvergiert, und F zweimal stetig differenzierbar ist.
   Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von F am Entwicklungspunkt x_n.

8. (*) Testen Sie das in Aufgabe 7 gegebene Konvergenzresultat anhand der Beispiele

   (a) $f(x) = x^4 - x^3 - 1, \quad x \in [1, 2]$

   (b) $f(x) = x^{3/2}, \quad x \geq 0.$