AKNUM Computernumerik UE 106.054
Computernumerik VU 101.484
Numerische Mathematik f. LA UE 106.986

5. Übungsblatt (Dienstag 16.06.2015)

Kreuzen Sie in der Übung diejenigen Beispiele an, die Sie durchgerechnet haben und an der Tafel präsentieren können. Bereiten Sie alle numerische Beispiele (*) mit MATLAB vor und bringen Sie den MATLAB Code auf USB Stick oder Laptop, sodass Sie diesen ebenfalls in der Übung vorführen können. Auch bei Beispielen ohne (*) ist die Verwendung von MATLAB manchmal nützlich. Wenden Sie sich bei Unklarheiten an Stefan Wurm (`stefan.wurm@tuwien.ac.at`) *oder an Caroline Geiersbach* (`caroline.geiersbach@tuwien.ac.at`).

1. (*) Informieren Sie sich in der Hilfe von MATLAB unter dem Stichwort *Integration* bzw. *Quadratur*, welche Möglichkeiten zur a) symbolischen bzw. b) numerischen Berechnung eines Integrals bestehen.
   Verwenden Sie als Testbeispiel jeweils

$$I = \int_0^5 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{10}(t-2)^2 \sin((6 + 3\sin t)t) \right) \mathrm{dt}.$$

2. (*) Vergleichen Sie Gauß- und Lobatto- Quadratur als Näherungen für das Integral

$$\int_2^6 \sin x^2 \, \mathrm{d}x$$

   unter Nutzung von jeweils vier Punkten.
   Hinweis: Die Knoten x_i bzw. die Gewichte w_i zur Lobatto-Quadratur auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind gegeben durch:

x_i	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{5}$	1	-1
w_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   Vergessen Sie nicht, die Quadraturpunkte von $[-1, 1]$ auf das gewünschte Intervall zu transformieren.

3. (*) *Milne Regel*

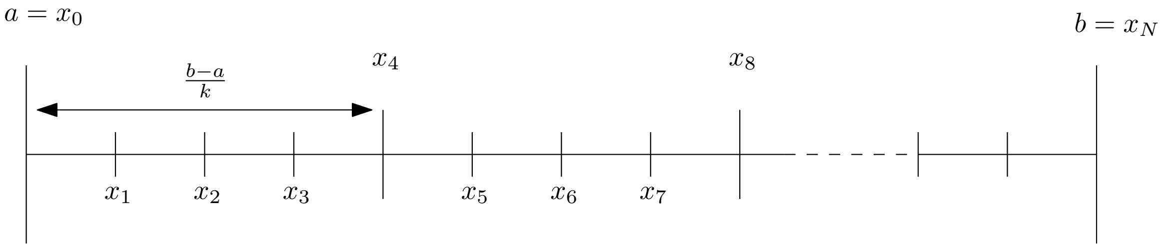

Abbildung 1: Anordnung der Stützstellen für die Milne-Regel

   Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche die stückweise Integration mittels Milne-Regel realisiert. Der Funktion sollen die Integralgrenzen $[a, b]$ und ein Vektor mit Stützwerten (die zu einem Gitter Γ gehöre) übergeben werde. Das Gitter $\Gamma = \{x_i, \; i = 0..N\}$ (der Einfachheit halber darf $N = 4k, k \in \mathbb{N}$ angenommen werden) wird dabei nicht übergeben und soll folgende Eigenschaften besitzen: $x_0 = a$, $x_N = b$ und $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{4k} = const.$ Die Gitterpunkte sind also äquidistant auf $[a, b]$ verteilt.

   Testen Sie Ihr Programm, indem Sie eine von Ihnen gewählte Funktion und die Funktionen $\exp(x)$ und $\exp(10x)$ damit numerisch integrieren und mit dem exakten Ergebnis vergleichen (doppellogarithmischer Plot des Fehlers über $H = 1/k$).

   Hinweis: Vergessen Sie nicht, dass die Integrale für die einzelnen Teilintervalle gemäß der Substitutionsregel mit der Intervallbreite skaliert werden müssen.

   Bemerkung: Um eine besonders effiziente Implementierung zu erreichen, kann die Berechnung eines einzelnen Teilintegrals als Skalarprodukt des Gewichtsvektors mit den Stützwerten (und Skalierung) dargestellt werden. Außerdem könnte verwendet werden, dass der Endpunkt eines Intervalls der Anfangspunkt des nächsten Intervalls ist und deshalb nur einmal mit der richtigen Gewichtung summiert werden muss.

4. (*) *Fehlerschätzer*
Erweitern Sie das Programm aus der vorigen Aufgabe, dass dieses zusätzlich einen sogenannten *asymptotisch korrekten Fehlerschätzer* für das globale Intervall zurückgibt. Ein solcher ist für die Milne-Regel gegeben durch

$$EST\,(k) := \frac{1}{2^p - 1}\left|I\,(k/2) - I\,(k)\right|, \quad p = 6$$

wobei $I(k)$ die Approximation des Integrals mit Unterteilung in k Teilintervalle bezeichnet und $EST(k)$ der dazugehörige Fehlerschätzer.

Für die Berechnung von $I(k/2)$ kann dieselbe Routine verwendet werden, wobei im Stützstellenvektor jeder zweite Eintrag weggelassen wird (dabei darf k natürlich als gerade Zahl angenommen werden).

Testen Sie nun auch die Qualität dieses Fehlerschätzers anhand der Testbeispiele aus der vorigen Aufgabe, indem Sie den geschätzten Fehler mit dem tatsächlichen Fehler vergleichen (doppellogarithmischer Plot der Abweichung des geschätzten Fehlers vom tatsächlichen über $H = 1/k$).

5. *Fehlerschätzer - Theorie*
Zeigen Sie, dass der Fehlerschätzer aus der vorigen Aufgabe tatsächlich *asymptotisch korrekt* ist. Nehmen Sie dazu an, dass

$$I(k) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le ck^{-p} + \mathcal{O}(k^{-q}), \quad p < q$$

gilt und zeigen Sie damit, dass

$$I(k) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2^p - 1}\left(I\,(k/2) - I\,(k)\right) = \mathcal{O}(k^{-q})$$

gilt.

Zusatzfrage: Welches q lässt sich für die Milne-Regel aufgrund der Euler-Maclaurinschen Summenformel erwarten?

6. (*) *Romberg-Integration*
Programmieren Sie die Romberg-Integration basierend auf der Milne-Regel (Sie können z.B. auf den Code aus Aufgabe 3 zurückgreifen) und testen Sie erneut anhand der Beispiele aus Aufgabe 3. Variieren Sie dabei die Anzahl der extrapolierten Werte zwischen 2 und 6 und die Basisschrittweite nach eigenem Ermessen und stellen Sie beides in geeigneten Plots dar.
Hinweis: Verwenden Sie das Neville-Schema aus der vorigen Übung.

7. (*) *2D-Integration*
Zu programmieren ist die 2D-Mittelpunktregel für das Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$. Schreiben Sie dazu eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [I] = mittelp2d(f,h)`, die zu einem gegebenen *function-handle* `f` und einer Schrittweite `h` (Annahme: $h = 2/k,\ k \in \mathbb{N}$) das Integral $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ zu `I` approximiert.

Anleitung: Zerlegen Sie das gegebene Quadrat in Quadrate mit Seitenlänge h. Werten Sie die Funktion an den Mittelpunkten dieser kleiner Quadrate aus und summieren Sie die Werte auf und skalieren Sie mit h^2 (siehe Abbildung 2).

Testen Sie die Funktion anhand der Funktionen $f(x,y) := \exp(x+y)$ und $g(x,y) := \exp(10\,(x+y))$, sowie einer von Ihnen selbst gewählten Funktion. Berechnen Sie die exakten Integralwerte, um die absoulten Fehler berechnen zu können. Variieren Sie die Gitterweite h und stellen Sie den Fehler in einem doppellogarithmischen Plot über der Gitterweite dar.

8. (*) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [I,EST] = trapzadap(f,h,tol)`, die folgende adaptive Integration mittels Trapezregel realisiert: zuerst wird auf äquidistanten Gittern mit Schrittweiten h und $h/2$ mittels summierter Trapezregel integriert. Mit diesen Ergebnissen wird der Fehler auf jedem Teilintervall geschätzt und im Vektor `EST` gespeichert. Halbieren Sie nun jene Intervalle auf denen der geschätzte Fehler die Toleranz `tol` überschreitet und iterieren Sie dieses Vorgehen bis in allen Intervallen die Toleranz erfüllt ist.

Versuchen Sie eine möglichst effiziente Implementierung zu realisieren, indem Sie bereits berechnete Resultate im nächsten Schritt wenn möglich wiederverwenden.

Testen Sie Ihre Funktion für das Integral

$$\int_0^5 \left[\frac{3}{2} + \sin((6 + 3\sin(t)) \cdot t) \cdot \frac{3}{10}(t-2)^2\right] \mathrm{d}t$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse für verschiedene Basisschrittweiten `h` und Toleranzen `tol` mit Aufgabe 1.

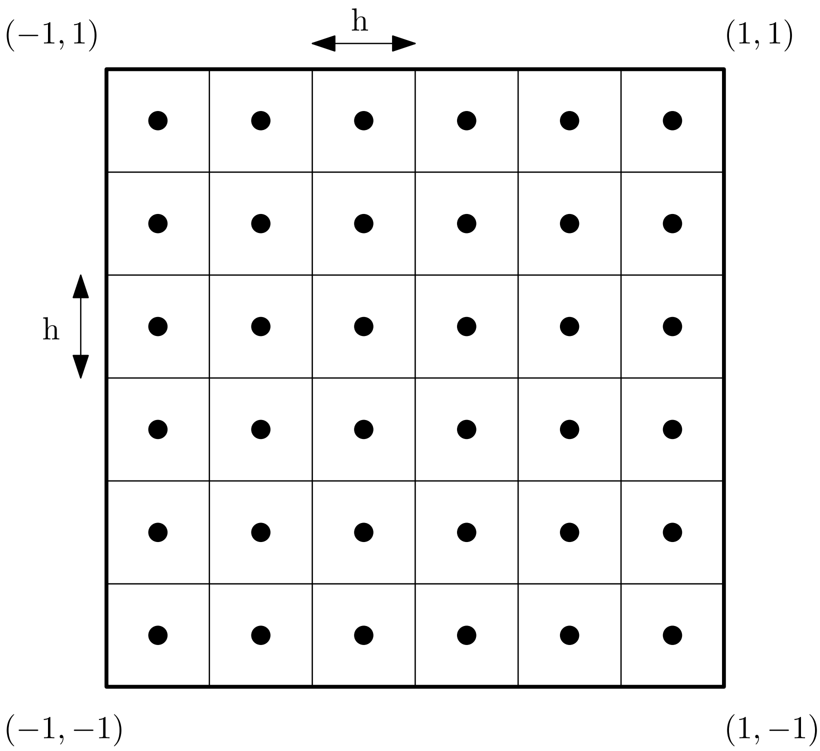

Abbildung 2: 2D-Quadraturschema mittels Mittelpunktregel