Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2017

Vorzubereiten bis: 27. April 2017 23. März 2017

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Mit der Konditionszahl $K_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ kann die Sensitivität des Resultats $y = f(x)$ in Bezug auf die Eingabe x gemessen werden.

Berechnen Sie für das Problem $y = f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ die Konditionszahl. Diskutieren Sie, für welche Werte r schlechte / gute Kondition vorliegt. Berechnen Sie weiters jeweils die Konditionszahlen für die Funktionen $y = f(x) = \exp(x)$, $y = f(x) = \ln x$ und $y = f(a) = a + b + c$ (b und c sind konstant) und diskutieren Sie jeweils die Ergebnisse.

Aufgabe 2:
Für eine differenzierbare Funktion f ist die (relative) Konditionszahl

$$\kappa_{\text{rel}}(t) = \left|\frac{tf'(t)}{f(t)}\right|.$$

a) Bestimmen Sie $\kappa_{\text{rel}}(t)$ für $f(t) = \arccos(t)$.

b) Plotten Sie $\kappa_{\text{rel}}(t)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Geben Sie eine adäquate Interpretation dafür an.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie numerisch (verwenden Sie MATLAB) mit Hilfe des *Differenzenquotienten* und des *zentralen Differenzenquotienten* die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \cos x$$

an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ für verschiedene Werte von h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(x)$ sowohl mittels der Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

als auch gemäß der Approximation

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

Addieren Sie solange Summanden der Form $y = \frac{x^k}{k!}$ mit $k > 0$ bzw. berechnen Sie den Ausdruck $(1+\frac{x}{n})^n$ bis sich der Wert des Ergebnisses nicht mehr ändert, d.h., bis die ersten 8 Nachkommastellen sich trotz fortlaufender Addition nicht mehr ändern. Wählen Sie verschiedene positive und negative reelle Werte für x und vergleichen Sie die beiden Darstellungen in Bezug auf Konvergenzgeschwindigkeit, Stabilität und Anzahl der benötigten Rechenoperationen. Welche Approximation ist (für welche Werte) zu bevorzugen?

Aufgabe 5:
Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = (1-x)^6.$$

Berechnen Sie zunächst die relative Konditionszahl $\kappa_x = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$ und werten Sie diese bei $x = 0.9$ aus. Welche Fehlerverstärkung erwarten Sie somit bei einer stabilen Auswertungsvariante an der Stelle $x = 0.9$?

Berechnen Sie anschließend $p(0.9)$ in MATLAB durch direkte Auswertung (also $y_1 = (1-0.9)^6$), durch Auswertung des expandierten Polynoms $y_2 = 1-6\cdot 0.9+15\cdot 0.9^2-20\cdot 0.9^3+15\cdot 0.9^4-6\cdot 0.9^5+0.9^6$ und durch Anwenden des Horner-Schemas $y_3 = 1+0.9\cdot(-6+0.9\cdot(15+0.9\cdot(-20+0.9\cdot(15+0.9\cdot(-6+0.9)))))$.

Vergleichen Sie die relativen Fehler $\left|\frac{10^{-6}-y_i}{10^{-6}}\right| = |1-10^6 y_i|$ und erklären Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 6:
Geben Sie eine detaillierte Rundungsfehleranalyse von

$$y = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

für $|x| \ll 1$ mithilfe der '$(1+\varepsilon)$-Technik' an. Definieren Sie dafür die fehlerbehaftete Funktion

$$\tilde{f}(x) := \frac{(1-\cos(x)(1+\varepsilon_1))(1+\varepsilon_2)}{x^2(1+\varepsilon_3)}(1+\varepsilon_4)$$

mit $\varepsilon_i < 10^{-9}$ für $i = 1, ..., 4$, unter der Berücksichtigung, dass die Auswertung des Cosinus' einen Rundungsfehler der Größenordnung von ε hervorruft, und untersuchen Sie das Verhalten des relativen Fehlers

$$\frac{|\tilde{f}(x) - f(x)|}{|f(x)|}$$

für betragskleine x.

Aufgabe 7:
Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[0,1]$ gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die folgende Beziehung:

$$\left|\frac{1}{2} - x_{n+1}\right| \leq \left|\frac{1}{2} - x_n\right|^5$$

Eine relle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist gleich 0 im double precision standard genau dann wenn sie $|x| < 2.2251\cdot 10^{-308}$ erfüllt. Wie groß muss n sein, damit $|\frac{1}{2} - x_n|$ im double precision standard gleich 0 ist?

Hinweis: Überlegen Sie sich, warum

$$|\tfrac{1}{2} - x_{n+1}| \leq |\tfrac{1}{2} - x_0|^{(5^{n+1})} \leq (\tfrac{1}{2})^{(5^{n+1})}$$

gilt und folgern Sie daraus, wie n gewählt werden muss, sodass

$$(\tfrac{1}{2})^{(5^{n+1})} < 2.2251 \cdot 10^{-308}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 8:
Die Zahl π kann iterativ über die Folge

$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k\sqrt{2(1-\sqrt{1-(2^{-k}u_k)^2})}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

approximiert werden. Berechnen Sie die ersten 30 Folgenglieder von (u_k) und den absoluten Fehler $|u_{30} - \pi|$. Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.