Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2017

Vorzubereiten bis: 11. Mai 2017 | 26. April 2017

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Konditionszahlen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

für die Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ und zwei weiteren Normen ihrer Wahl.

Aufgabe 2:
Lösen und untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme $A_i\vec{x} = \vec{b}$, mit $i = 1, 2$ und den beiden Koeffizientenmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

und jeweils der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Inhomogenität mit Störung $\tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.99999 \\ 1.00001 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist diese durchführbar? Für welche c ist die Matrix regulär?

Aufgabe 4:
Informieren Sie sich über die Cholesky-Zerlegung (Definition, Existenz, Konstruktion, Anwendungen etc.) und diskutieren Sie die Unterschiede zur LU-Zerlegung. Erklären Sie zusätzlich den in Matlab vorimplementierten Befehl `chol` und testen Sie diesen anhand von mindestens zwei Beispielen.

Aufgabe 5:
Aus der Vorlesung ergibt sich folgender Satz:
$x \in \mathbb{R}^n$ löst das lineare Ausgleichsproblem $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2^2 = \min!$ genau dann wenn x die Gauß'sche Normalgleichung löst, d.h.:

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$

Es existiert mindestens eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des linearen Ausgleichsproblems und der Lösungsraum $\mathcal{L}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \vec{x}_0 + \ker(A^T A)$$

Seien nun $x_1, ..., x_m$ paarweise verschiedene Stützstellen mit Stützwerten $y_1, ..., y_m$. Gesucht sei ein Polynom p vom Grad $n < m - 1$, sodass

$$\sum_{j=1}^{m} |p(x_j) - y_j|^2$$

minimal wird.
Zeigen Sie mithilfe des obigen Satzes, dass die Lösung des Problems eindeutig ist.

Aufgabe 6:
Fortsetzung zu 5. Stützstellen und Stützwerte seinen gegeben durch

x_j :	0	1	2	3	4	5
y_j :	2	-1	0	3	13	14

Berechnen Sie jenes p vom Grad 2, sodass $\sum_{j=1}^{6} |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird. Warum ist die Lösung eindeutig? Skizzieren Sie p und die dazugehörigen Stützstellen und Stützwerte.

Aufgabe 7:
Führen Sie eine LU-Zerlegung ohne bzw. mit Zeilenvertauschungen für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der 2×2-Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 2.25 \\ 0.50 & 4.00 \end{pmatrix}$$

in 5-stelliger Dezimalrechnung durch. Was beobachten Sie? Berechnen Sie $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Aufgabe 8:
Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 217 &= 780x + 563y \\ 254 &= 913x + 659y \end{aligned}$$

sind zwei Näherungslösungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für beide Näherungen die Norm der Residuen $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2$. Welche Lösung würden Sie deshalb als exakter einstufen? Bestimmen Sie noch die exakte Lösung und erklären Sie was passiert.