Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 23. Mai 2017 10. Mai 2017

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Nullstelle x^* von

$$F(x) = x - e^{-x},$$

$x \in [0.5, 0.69]$ auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedene Startwerte. Vergleichen Sie die beiden Verfahren unter dem Aspekt der Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgabe 2:
Die Vorgehensweise aus Aufgabe 1 mit $F(x) = a - e^x$ kann dazu verwendet werden, um die Funktion $\ln(x)$ an einer festen Stelle $x = a > 0$ nährerungsweise zu berechnen. Begründen Sie diesen Sachverhalt. Verwenden Sie das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion $F(x)$ und weisen Sie experimentell für $a = 1$ und $a = 2$ quadratische Konvergenz nach.

Aufgabe 3:
Informieren Sie sich über das Bisektionsverfahren und implementieren Sie dieses in Matlab. Testen Sie ihren Code anhand des Beispiels $x^3 - \frac{1}{2}$ für verschiedene Startwerte. Wie viele Iterationsschritte werden benötigt, um ein akzeptables Ergebnis zu erhalten?

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass es sich bei folgenden Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ um Kontraktionen handelt und bestimmen Sie jeweils die zugehörige Lipschitz-Konstante L.

a) $f(x) := \frac{1}{4}\sqrt{3x+2}$ auf $D = [0, 3)$

b) $f(x) := \cos(x)$ mit $D = (a, b)$ und $-1 < a < b < 1$, x in Bogenmaß

c) $f(x) := \frac{1}{8}\sqrt{x^2+1}$ mit $D = [-4, 1]$

Aufgabe 5:
Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + (3 - \varepsilon^2)x + \varepsilon^2 - 1$. Gehen Sie folgendermaßen vor, um die drei Nullstellen des Polynoms zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie die erste Nullstelle x_1 durch Anwendung des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert.

(b) Dividieren Sie das ursprüngliche Polynom durch $(x - x_1)$ und wiederholen Sie Punkte (a) und (b) sinngemäß bis alle Nullstellen gefunden sind.

Vergleichen Sie die gefundenen Lösungen mit den von Ihnen berechneten exakten Nullstellen. Testen Sie für verschiedene ε.
Hinweis: Speichern Sie das Polynom als Koeffizientenvektor. Verwenden Sie die Matlab Befehle polyval, polyder, deconv. Eine exakte Nullstelle lautet 1, die restlichen können Sie durch Polynomdivision und quadratischer Lösungsformel berechnen.

Aufgabe 6:
Zeigen Sie folgendes Konvergenzresultat des Newton-Verfahrens:

$$x^* - x_{n+1} = -(x^* - x_n)^2 \frac{F''(\xi_n)}{2F'(x_n)}, \qquad \xi_n \in (x_n, x^*)$$

wobei x^* eine Nullstelle von $F(x)$ ist, gegen die das Newtonverfahren konvergiert, und F zweimal stetig differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von $F(x)$ um den Entwicklungspunkt x_n.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Gleichung $x + \ln x = 0$ deren eindeutige Lösung im Intervall $[0.5, 0.6]$ liegt. Implementieren Sie zur approximativen Lösung dieser Gleichung die folgenden drei Iterationsverfahren

$$x_{n+1} := -\ln(x_n), \quad x_{n+1} := \exp(-x_n), \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$$

zu verschiedenen Startwerten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB die zwei Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2 &= 0 \\ u^3 - v^2 &= 0 \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich auch anhand einer Skizze, dass das nichtlineare Gleichungssystem genau zwei Lösungen hat. Wenden Sie das Newtonverfahren zur Berechnung der beiden Lösungen an, indem Sie jeweils geeignete Startvektoren aussuchen.