Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 18. Mai 2017 10. Mai 2017

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Lösen Sie mittels Fixpunktiteration die Gleichung

$$\arcsin\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{3}{4x}$$

in Matlab indem Sie diese vorher als geeignete Fixpunktabbildung formulieren.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Nullstelle von $f(x) = \arctan x$, verwenden Sie auch das gedämpfte Newtonverfahren mit geeigneten Dämpfungsfaktoren. Probieren Sie verschiedene Startwerte und versuchen Sie, die Grenzen des Einzugsbereichs herauszufinden.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass es sich bei folgenden Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ um Kontraktionen handelt und bestimmen Sie jeweils die zugehörige Lipschitz-Konstante L.

a) $f(x) := \cos(x)$ mit $D = (a, b)$ und $-1 < a < b < 1$, x in Bogenmaß

b) $f(x) := \frac{1}{8}\sqrt{x^2 + 1}$ mit $D = [-4, 1]$

Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ eine Kontraktion?

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Nullstelle x^* für die Funktion $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedende Startwerte. Vergleichen Sie die beiden Verfahren unter dem Aspekt der Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgabe 5:
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} uv + u - v - 1 &= 0 \\ uv &= 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die exakten Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems.

(b) Berechnen Sie für die Startwerte $x_0 = (-2, -1)^T$ und $x_0 = (0.5, 1)^T$ jeweils die ersten 7 Iterierten des Newtonverfahrens.

Aufgabe 6:
Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + (3 - \varepsilon^2)x + \varepsilon^2 - 1$. Gehen Sie folgendermaßen vor, um die drei Nullstellen des Polynoms zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie die erste Nullstelle x_1 durch Anwendung des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert.

(b) Dividieren Sie das ursprüngliche Polynom durch $(x - x_1)$ und wiederholen Sie Punkte (a) und (b) sinngemäß bis alle Nullstellen gefunden sind.

Vergleichen Sie die gefundenen Lösungen mit den von Ihnen berechneten exakten Nullstellen. Testen Sie für verschiedene ε.
Hinweis: Speichern Sie das Polynom als Koeffizientenvektor. Verwenden Sie die MATLAB Befehle POLYVAL, POLYDER, DECONV. Eine exakte Nullstelle lautet 1, die restlichen können Sie durch Polynomdivision und quadratischer Lösungsformel berechnen.

Aufgabe 7:
Zeigen Sie folgendes Konvergenzresultat des Newton-Verfahrens:

$$x^* - x_{n+1} = -(x^* - x_n)^2 \frac{F''(\xi_n)}{2F'(x_n)}, \qquad \xi_n \in (x_n, x^*)$$

wobei x^* eine Nullstelle von $F(x)$ ist, gegen die das Newtonverfahren konvergiert, und F zweimal stetig differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von $F(x)$ um den Entwicklungspunkt x_n.

Aufgabe 8:
Informieren Sie sich über das Sekantenverfahren und implementieren Sie dieses in MATLAB. Testen Sie ihren Code anhand des Beispiels $x^3 - \frac{1}{2}$ für verschiedene Startwerte. Wie viele Iterationsschritte werden benötigt, um ein akzeptables Ergebnis zu erhalten?