Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 30. Mai 2017 23. Mai 2017

4. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Berechnen Sie für die Stützpunkte $\{(x_k, y_k)\} = \{(0,0),(1,3),(2,2),(3,1)\}$ die Dividierten Differenzen

$$f[x_0, x_1] \qquad f[x_0, x_1, x_2] \qquad f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

und geben Sie das entsprechende Newtonsche Interpolationspolynom an.

Aufgabe 2:
Seien die Stützstellen $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gegeben. Berechnen Sie die Lagrange- bzw. die Newton-Basispolynome und stellen Sie diese graphisch dar. Erläutern Sie die wesentlichen Unterschiede.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \sinh x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $|f(x) - p(x)|$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:

(a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \pi$

(b) Polynom vom Grad 2: x_0, x_1 und $x_2 = \frac{\pi}{2}$

(c) Polynom vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$

(d) Theoretische Abschätzung des Interpolationsfehlers für (c) an der Stelle $\frac{\pi}{3}$

Aufgabe 4:
Berechnen Sie händisch das Hermiteinterpolationspolynom zu den Stützstellen

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 1, \quad f(4) = 3, \quad f'(4) = 2 \quad f''(4) = 1.$$

Verwenden Sie dazu das Nevilleschema.

Aufgabe 5:
Interpolieren Sie mithilfe von Matlab die Funktion von Runge

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$$

auf $[-1, 1]$ auf zwei Arten für $n = 20$:

(a) an den äquidistanten Punkten $x_j = -1 + \frac{2j}{n} \;\; j = 0, 1, \dots, n$

(b) an den Nullstellen des $n+1$-ten Tschebyscheff Polynoms T_{n+1}

Plotten Sie den Fehlerverlauf von beiden Varianten und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 6:
Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion

$$|\omega(\bar{x})| = |(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)...(\bar{x}-x_n)|$$

ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max\limits_{0\leq\bar{x}\leq 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.

Aufgabe 7:
Approximieren Sie $\sqrt{3}$ durch $p(\frac{1}{2})$, wobei p das Interpolationspolynom 3. Grades zu

$$p(x) = 3^x \quad x = -1, 0, 1, 2$$

darstellt. Verwenden Sie dazu das Neville-Schema. Geben Sie eine Schranke für den Approximationsfehler an.

Aufgabe 8:
Sei $f(x) = \exp(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge paarweise verschiedener Stützstellen aus dem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass für die interpolierenden Polynome p_n vom Grad n mit $p_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, ..., n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| = 0$$

Hinweis: Zeigen Sie mithilfe von Satz 7 aus Abschnitt 4.6, dass das zu p gehörige Interpolationspolynom $\tilde{p}$ die Ungleichung

$$\|p - \tilde{p}\|_\infty \leq \frac{\|N_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

erfüllt, wobei N_{n+1} das $(n+1)$-te Newton-Basispolynom beschreibt, und schließen Sie daraus, dass

$$\max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_\infty$$

gilt. Argumentieren Sie anschließend, warum diese obere Schranke für wachsende n gegen 0 konvergiert.