Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 1. Juni 2017 23. Mai 2017

4. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Seien die Stützstellen $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gegeben. Berechnen Sie die Lagrange- bzw. die Newton-Basispolynome und stellen Sie diese graphisch dar. Erläutern Sie die wesentlichen Unterschiede.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie für die Stützpunkte $\{(x_k, y_k)\} = \{(-1,4),(0,1),(1,3),(2,2)\}$ die Dividierten Differenzen

$$f[x_0, x_1] \qquad f[x_0, x_1, x_2] \qquad f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

und geben Sie das entsprechende Newtonsche Interpolationspolynom an.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \cosh x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $|f(x) - p(x)|$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:

(e) gerades Polynom 4. Grades: x_0, x_1, x_2

(f) ungerades Polynom 3. Grades: x_0, x_1

(g) Taylorpolynom vom Grad $n = 4$ und Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

(h) Interpolation mit Lagrange Polynomen an x_0, x_1, x_2

Aufgabe 4:
Berechnen Sie händisch das Hermiteinterpolationspolynom zu den Stützstellen

$$f(2) = 4, \quad f'(2) = 1, \quad f(6) = 5, \quad f'(6) = 4 \quad f''(2) = 1.$$

Verwenden Sie dazu das Nevilleschema.

Aufgabe 5:
Sei

$$R(l, m) := \{x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, p \in \Pi_l, q \in \Pi_m \setminus \{0\}\}$$

die Menge aller rationalen Funktionen mit maximalem Zählergrad l und Nennergrad m. Weiters seien $x_0, ..., x_n$ mit $n := l + m$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n$ vorgegebene Daten. Gesucht ist zu gegebenen l, m eine rationale Funktion $r^{(l,m)} \in R(l, m)$, sodass die Interpolationsbedingungen

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : \qquad r^{(l,m)}(x_i) = f_i \tag{1}$$

erfüllt sind.

a) Zeigen Sie, dass eine notwendige Bedingung an das Zählerpolynom p und Nennerpolynom q von $r^{(l,m)}$ gegeben ist durch

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : p(x_i) - f_i q(x_i) = 0 \tag{2}$$

Ist (2) (eindeutig) lösbar?

b) Zeigen Sie: Sei $(p, q) \in (\Pi_l \times \Pi_m \setminus \{0\})$ Lösung von (1), dann ist $\frac{p}{q} \in R(l, m)$, aber $\frac{p}{q}$ löst nicht notwendig (1).

Aufgabe 6:
Fortsetzung von Beispiel 5: Berechenen Sie für ein äquidistantes Gitter Ihrer Wahl auf $[-1, 1]$ das Interpolationspolynom

$$f(x) = \frac{1}{1 + 10x^2}$$

auf zwei verschiedene Arten.

- Mithilfe von klassischer Polynominterpolation.
- Mithilfe von rationaler Polynominterpolation, indem Sie das Gleichungssystem (2) aus Aufgabe 5 lösen.

Experimentieren Sie dabei mit der Anzahl an Stützstellen n und variieren Sie den Zähler- bzw. Nennergrad l bzw. m.
Hinweis: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$ des linearen Gleichungssystems aus (2) lässt sich schematisch in zwei Untermatrizen unterteilen via:

$$A = (V_1, V_2)$$

wobei V_1 der Vandermondematrix zu den Stützstellen $x_0, ..., x_n$ für ein Polynom vom Grad l entspricht. V_2 hat eine ähnliche Gestalt.

Aufgabe 7:
Approximieren Sie $\sqrt{2}$ durch $p(\frac{1}{2})$, wobei p das Interpolationspolynom 3. Grades zu

$$p(x) = 2^x \quad x = -1, 0, 1, 2$$

darstellt. Verwenden Sie dazu das Neville-Schema. Geben Sie eine Schranke für den Approximationsfehler an.

Aufgabe 8:
Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion

$$|\omega(\bar{x})| = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)...(\bar{x} - x_n)|$$

ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max\limits_{0 \leq \bar{x} \leq 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.