Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Tobias Danczul, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2017

Vorzubereiten bis: 8. Juni 2017 26. Mai 2017

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Eine Quadraturformel I hat die Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn durch sie alle Polynome aus $\mathcal{P}_{m-1}$ exakt integriert werden. Sei nun eine beliebige Quadraturformel I auf dem Intervall $[a,b]$ gegeben mit $n+1$ Quadraturknoten $x_0, ..., x_n$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von I mindestens n und höchstens $2n+2$ beträgt.
Hinweis: Betrachten Sie für den zweiten Fall das Quadrat des $n+1$ Newton-Basispolynoms $\omega(x)$, also

$$\omega(x)^2 = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right)^2$$

und berechnen Sie $I(\omega^2)$.

Aufgabe 2:
Verwenden Sie die Simpsonregel und 3/8-Regel, um das Integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ anzunähern. Wählen Sie $h = \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}, \frac{1}{42}, \frac{1}{48}$ und berechnen Sie jeweils den Fehler. Plotten Sie den Fehler mittels der Funktion loglog.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete MATLAB Funktion als Referenzlösung.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^3 (-4x^3 + x^2 - x + 1)\, dx$ mit der Simpsonregel für $h = 0.4$. Wie groß wird der relative Fehler der Integralnäherung? Bestimmen Sie eine Schrittweite h so, dass mit der Trapezregel ein absoluter Fehler kleiner als 10^{-3} erreicht wird.

Aufgabe 4:
Quadraturformeln werden häufig auf dem Standardintervall $[-1,1]$ angegeben. Diese können leicht mittels Substitution auf allgemeine Intervalle umgerechnet werden. Realisieren Sie diese Idee, indem Sie eine Funktion mit der Signatur `function nodes = Trafo(X,a,b)` schreiben, die zu gegebenen Gauß-Quadraturknoten X auf dem Standardintervall $[-1,1]$ die transformierten Knoten `nodes` auf dem Intervall $[a,b]$ zurückliefert. Müssen bei einer solchen Transformation die Gewichte ebenfalls transformiert werden?

Aufgabe 5:
Programmieren Sie die 2D-Gaussquadratur mit den Quadraturknoten (angegeben bezüglich dem Standardintervall $[-1,1]$)

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

und den Gewichten

$$c_0 = \frac{5}{9}, c_1 = \frac{8}{9}, c_2 = \frac{5}{9}$$

für das Einheitsdreieck T mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0)$ und $(0,1)$. Schreiben Sie dazu eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [I] = Gauss2d(f)`, die zu einem gegebenen *function-handle* `f` das Integral $\int_T f(x,y)\,d(x,y)$ zu `I` approximiert. Benutzen Sie dafür die sogenannte Duffy-Transformation

$$\begin{aligned} \Psi : [0,1]^2 &\longrightarrow T \\ (x,y) &\mapsto (x,(1-x)y) \end{aligned}$$

Anleitung: Mit dem Transformationssatz lässt sich das 2-dimensionale Integral über T zurückführen auf zwei eindimensionale Integrale via

$$\int_T f(x,y)\,d(x,y) = \int_{[0,1]^2} f(\Psi(x,y))|det(d\Psi(x,y))|\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)det(\Psi(x,y))\,dx \right)\,dy$$

Werten Sie die Funktion an den auf das Intervall $[0,1]$ transformierten Gauss-Quadraturknoten aus (benutzen Sie dafür Ihre Funktion `Trafo()` aus Beispiel 4) und multiplizieren Sie das Ergebnis mit den Gewichten c_i. Anschließendes Summieren liefert Ihnen die gewünschte Approximation für das Integral.

Testen Sie die Funktion anhand der Funktionen $f(x,y) := \exp(x+y)$ und $g(x,y) := \exp(10\,(x+y))$, sowie einer von Ihnen selbst gewählten Funktion. Berechnen Sie die exakten Integralwerte, um die absoulten Fehler berechnen zu können.

Aufgabe 6:
Argumentieren Sie ohne Unterstützung Ihres Rechners, mit wie vielen Funktionsauswertungen das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} berechnet werden kann, basierend aud der

a) Trapezregel.

b) Simpson-Regel.

Hinweis: Benutzen Sie die Fehlerdarstellnugen aus Tabelle 5.1.

Aufgabe 7:
Informieren Sie sich in der Hilfe von MATLAB unter dem Stichwort *Integration* bzw. *Quadratur*, welche Möglichkeiten zur a) symbolischen bzw. b) numerischen Berechnung eines Integrals bestehen. Verwenden Sie als Testbeispiel jeweils

$$I = \int_0^5 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{10}(t-2)^2 \sin((6+3\sin t)t) \right)\,dt.$$