

Vorzubereiten bis: 9. Mai 2017

26. April 2017

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Parameterdarstellung

$$g_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 5 \\ 1, 0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 2, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 45 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Berechnen Sie die exakte Lösung und die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Koeffizientenmatrix A des zu lösenden Gleichungssystems, geben Sie eine geometrische Interpretation.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$ in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.
- b) Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1, 1)^T$ und $\Delta\vec{b} = (\delta, \delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$. Vergleichen Sie den jeweiligen relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

mit der allgemeinen Fehlerschätzung

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Aufgabe 3:

Führen Sie eine LU-Zerlegung in MATLAB durch. Dazu sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -14 \\ 3 & 6 & a & -15 \\ -4 & -14 & -15 & 30 \end{pmatrix}$$

gegeben für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie an, für welchen Wert von a die LU-Zerlegung nicht existiert. Informieren Sie sich über die in MATLAB implementierte Funktion `lu` und den Befehl `syms`.

Aufgabe 4:

Führen Sie eine LU-Zerlegung ohne bzw. mit Zeilenpivotisierung für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der 2×2 -Matrix A ,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 2.25 \\ 0.50 & 4.00 \end{pmatrix}$$

in 5-stelliger Dezimalrechnung durch. Was beobachten Sie? Berechnen Sie $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie zu den Stützpunkten und den zugehörigen Stützwerten

$$\begin{array}{c|cccc} j & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline x_j & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f_j & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

jenes Polynom $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ zweiten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$E(p) = \sum_{j=0}^3 (p(x_j) - f_j)^2$$

minimiert, indem Sie das Problem auf die Gauß'sche Normalengleichung zurückführen.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Konditionszahlen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

für mindestens drei verschiedene Normen.

Aufgabe 7:

Konstruieren Sie eine LU-Zerlegung der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ohne Rechnerunterstützung und überprüfen Sie ihr Ergebnis mithilfe von MATLAB. Informieren Sie sich auch über die MATLAB-interne Funktion `lu`.

Aufgabe 8:

Informieren Sie sich über die QR-Zerlegung (Definition, Existenz, Konstruktion, Anwendungen etc.) und diskutieren Sie die Unterschiede zur LU-Zerlegung. Erklären Sie zusätzlich den in MATLAB vorimplementierten Befehl `qr` und testen Sie diesen anhand von mindestens zwei Beispielen.