Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 17. April 2018 19. März 2018

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Für eine differenzierbare Funktion f ist die (relative) Konditionszahl

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|.$$

a) Bestimmen Sie $\kappa_{\text{rel}}(x)$ für $f(x) = \arcsin(x)$.

b) Plotten Sie $\kappa_{\text{rel}}(x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Geben Sie eine adäquate Interpretation dafür an.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie numerisch (verwenden Sie MATLAB) mit Hilfe des *Differenzenquotienten* und des *zentralen Differenzenquotienten* die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ für verschiedene Werte von h, vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis und verifizieren Sie experimentell die Ordnung des entsprechenden Verfahrensfehler.

Aufgabe 3:
Rundungsfehleranalyse. Geben Sie eine detaillierte Rundungsfehleranalyse von

$$y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

für $|x| \ll 1$ an, verwenden Sie dabei unter anderem dass $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ oder $y \approx \frac{1}{2}$ und vernachlässigen Sie ε-Terme höherer Ordnung, da diese keinen signifikanten Beitrag leisten. Verwenden Sie außerdem $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ für $\varepsilon \ll 1$. Warum gilt das?

Aufgabe 4:
Auslöschung: Werten Sie die beiden identen Algorithmen

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

für verschiedene Werte von x ($x \ll 1$, $x \gg 1$, ...) und mit verschiedenen Genauigkeiten aus.

Aufgabe 5:
Zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 2bx + c = 0,\ b, c \in \mathbb{R}$ kann man die Formel

$$x = b - \sqrt{b^2 - c}$$

verwenden. Bei $b^2 \gg c$ entsteht Auslöschung. Überprüfen Sie dies mit MATLAB für $b = 5555555.55555555$ und $c = 1234567.87654321$ (Hinweis: Geben Sie zunächst `format long` in den Workspace ein. So werden 16 Stellen der Zahlen angezeigt. Das exakte Ergebnis ist $x = 0.11111111$). Finden Sie eine äquivalente Formel indem Sie mit $1 = (b + \sqrt{b^2 - c})/(b + \sqrt{b^2 - c})$ multiplizieren, die für diese Werte das exakte Ergebnis liefert. Überprüfen Sie das wieder mit MATLAB.

Aufgabe 6:
Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ hat die folgende Reihendarstellung:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Berechnen Sie Funktionswerte der Exponentialfunktion gemäß dieser Reihenentwicklung, indem Sie Summanden der Form $y = \frac{x^k}{k!}$ mit $k > 0$ solange aufsummieren, bis sich der Wert des Ergebnisses nicht mehr ändert, d.h., bis die ersten 8 Nachkommastellen trotz fortlaufender Addition konstant bleiben. Wählen Sie verschiedene positive und negative reelle Werte für x und erstellen Sie eine Tabelle.

Aufgabe 7:
Die Zahl π kann iterativ über die Folge

$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (2^{-k} u_k)^2})}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

approximiert werden. Berechnen Sie die ersten 30 Folgenglieder von (u_k) und den absoluten Fehler $|u_{30} - \pi|$. Für welches k ist die Approximation am besten? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 8:
Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ sind bekannterweise

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Kondition des Problems in Abhängigkeit von a, b und c, indem Sie jeweils einen der Parameter als variabel und die anderen beiden Parameter als fest annehmen. Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut? Interpretieren Sie die Resultate geometrisch.