Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 24. April 2018 — 23. März 2018

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$.

b) Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1,1)^T$ und $\Delta\vec{b} = (\delta,\delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$. Vergleichen Sie den jeweiligen relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

mit der allgemeinen Fehlerschätzung

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Aufgabe 2:
Führen Sie eine LU-Zerlegung ohne bzw. mit Zeilenvertauschungen für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der 2×2-Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 2.25 \\ 0.50 & 4.00 \end{pmatrix}$$

in 5-stelliger Dezimalrechnung durch. Was beobachten Sie? Berechnen Sie $\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Parameterdarstellung

$$g_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Berechnen Sie die exakte Lösung und die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Koeffizientenmatrix A des zu lösenden Gleichungssystems, geben Sie eine geometrische Interpretation.

Aufgabe 4:
Informieren Sie sich über die QR-Zerlegung (Definition, Konstruktion, ...) und diskutieren Sie den

Unterschied zur LU-Zerlegung. Bestimmen Sie weiters eine QR-Zerlegung der Form $AP = QR$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:
Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 217 & = & 780x & + & 563y \\ 254 & = & 913x & + & 659y \end{array}$$

sind zwei Näherungslösungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für beide Näherungen die Norm der Residuen $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2$. Welche Lösung würden Sie deshalb als exakter einstufen? Bestimmen Sie noch die exakte Lösung und erklären Sie was passiert.

Aufgabe 6:
Informieren Sie sich über die Cholesky-Zerlegung (Definition, Voraussetzungen, Konstruktion, Aufwand, ...) und diskutieren Sie den Unterschied zur LU-Zerlegung. Weiters schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Cholesky-Zerlegung einer symmetrischen tridiagonalen Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, das ist eine Matix der Form $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $t_{ij} \neq 0,\ \forall i,j$ mit $|i-j| \leq 1$, $t_{ij} = 0,\ \forall i,j$ mit $|i-j| > 1$ und $t_{ij} = t_{ji}$.

Aufgabe 7:
Konstruieren Sie eine LU-Zerlegung der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ohne Rechnerunterstützung und überprüfen Sie ihr Ergebnis mithilfe von MATLAB. Informieren Sie sich auch über die MATLAB-interne Funktion `lu`.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist diese durchführbar? Für welche c ist die Matrix regulär?