Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 26. April 2018 23. März 2018

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Konditionszahlen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

für mindestens drei verschiedene Normen.

Aufgabe 2:
Führen Sie eine LU-Zerlegung ohne bzw. mit Zeilenpivotisierung für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der 2×2-Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 2.25 \\ 0.50 & 4.00 \end{pmatrix}$$

in 5-stelliger Dezimalrechnung durch. Was beobachten Sie? Berechnen Sie $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Parameterdarstellung

$$g_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Berechnen Sie die exakte Lösung und die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Koeffizientenmatrix A des zu lösenden Gleichungssystems, geben Sie eine geometrische Interpretation.

Aufgabe 4:
Informieren Sie sich über die QR-Zerlegung (Definition, Existenz, Konstruktion, Anwendungen etc.) und diskutieren Sie die Unterschiede zur LU-Zerlegung. Erklären Sie zusätzlich den in Matlab vorimplementierten Befehl `qr` und testen Sie diesen anhand von mindestens zwei Beispielen.

Aufgabe 5:
Lösen und untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme $A_i\vec{x} = \vec{b}$, mit $i = 1, 2$ und den beiden Koeffizientenmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

und jeweils der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Inhomogenität mit Störung $\tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.99999 \\ 1.00001 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6:
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$.

b) Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1,1)^T$ und $\Delta\vec{b} = (\delta,\delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$. Vergleichen Sie den jeweiligen relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

mit der allgemeinen Fehlerschätzung

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \kappa(A)\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie zu den Stützpunkten und den zugehörigen Stützwerten

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
f_j	0	1	2	0

jenes Polynom $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ zweiten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$E(p) = \sum_{j=0}^{3} (p(x_j) - f_j)^2$$

minimiert, indem Sie das Problem auf die Gauß'sche Normalgleichungen zurückführen.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist diese durchführbar? Für welche c ist die Matrix regulär?