Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 17. Mai 2018 5. Mai 2018

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Gleichung $x + \ln x = 0$ deren eindeutige Lösung im Intervall $[0.5, 0.6]$ liegt. Implementieren Sie zur approximativen Lösung dieser Gleichung die folgenden drei Iterationsverfahren

$$x_{n+1} := -\ln(x_n), \quad x_{n+1} := \exp(-x_n), \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$$

zu verschiedenen Startwerten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Nullstelle x^* für die Funktion $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}$, auf zwei Arten (Iterationsverfahren, Newtonverfahren) für verschiedende Startwerte. Vergleichen Sie die beiden Verfahren unter dem Aspekt der Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgabe 3:
Informieren Sie sich über das Sekantenverfahren und implementieren Sie dieses in MATLAB. Testen Sie ihren Code anhand des Beispiels $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ für verschiedene Startwerte. Wie viele Iterationsschritte werden benötigt, um ein akzeptables Ergebnis zu erhalten?

Aufgabe 4:
Zeigen Sie analytisch, dass es sich bei folgenden Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ um Kontraktionen handelt und bestimmen Sie jeweils die zugehörige Lipschitz-Konstante L.

a) $f(x) := \cos(x)$ mit $D = (a, b)$ und $-1 < a < b < 1$, x in Bogenmaß
b) $f(x) := \frac{1}{8}\sqrt{x^2 + 1}$ mit $D = [-4, 1]$

Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ eine Kontraktion?

Aufgabe 5:
Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + (3 - \varepsilon^2)x + \varepsilon^2 - 1$. Gehen Sie folgendermaßen vor, um die drei Nullstellen des Polynoms zu bestimmen:

(a) Bestimmen Sie die erste Nullstelle x_1 durch Anwendung des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert.

(b) Dividieren Sie das ursprüngliche Polynom durch $(x - x_1)$ und wiederholen Sie Punkte (a) und (b) sinngemäß bis alle Nullstellen gefunden sind.

Vergleichen Sie die gefundenen Lösungen mit den von Ihnen berechneten exakten Nullstellen. Testen Sie für verschiedene ε.
Hinweis: Speichern Sie das Polynom als Koeffizientenvektor. Verwenden Sie die MATLAB Befehle POLYVAL, POLYDER, DECONV. Eine exakte Nullstelle lautet 1, die restlichen können Sie durch Polynomdivision und quadratische Lösungsformel berechnen.

Aufgabe 6:
Betrachten Sie wieder das Polynom aus der vorigen Aufgabe. Eine alternative Methode zur Berechnung der Nullstellen ist folgende: Für ein Polynom mit Nullstellen x_1, x_2, x_3 der Form $p(x) = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$ gelten nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Vieta die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ c_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems.

Aufgabe 7:
Lösen Sie mittels Fixpunktiteration die Gleichung

$$\arcsin\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{3}{4x}$$

in Matlab indem Sie diese vorher als geeignete Fixpunktabbildung formulieren.

Aufgabe 8:
Zeigen Sie folgendes Konvergenzresultat des Newton-Verfahrens:

$$x^* - x_{n+1} = -(x^* - x_n)^2 \frac{F''(\xi_n)}{2F'(x_n)}, \qquad \xi_n \in (x_n, x^*)$$

wobei x^* eine Nullstelle von $F(x)$ ist, gegen die das Newtonverfahren konvergiert, und F zweimal stetig differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von $F(x)$ um den Entwicklungspunkt x_n.