Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 29. Mai 2018 17. Mai 2018

4. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \cosh x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $|f(x) - p(x)|$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:

(a) gerades Polynom 4. Grades: x_0, x_1, x_2

(b) ungerades Polynom 3. Grades: x_0, x_1

(c) Taylorpolynom vom Grad $n = 4$ und Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

(d) Interpolation mit Lagrange Polynomen an x_0, x_1, x_2

Aufgabe 2:
Berechnen Sie händisch das Hermiteinterpolationspolynom zu den Stützstellen

$$f(2) = 4, \quad f'(2) = 1, \quad f(6) = 5, \quad f'(6) = 4 \quad f''(2) = 1.$$

Verwenden Sie dazu das verallgemeinerte Nevilleschema.

Aufgabe 3:
Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion

$$|\omega(\bar{x})| = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)...(\bar{x} - x_n)|$$

ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max\limits_{0 \leq \bar{x} \leq 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie für die Stützpunkte $\{(x_k, y_k)\} = \{(0, 0), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ die Dividierten Differenzen

$$f[x_0, x_1] \qquad f[x_0, x_1, x_2] \qquad f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

und geben Sie das entsprechende Newtonsche Interpolationspolynom an.

Aufgabe 5:
Seien die Stützstellen $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gegeben. Berechnen Sie die Lagrange- bzw. die Newton-Basispolynome und stellen Sie diese graphisch dar. Erläutern Sie die wesentlichen Unterschiede.

Aufgabe 6:
Sei

$$R(l,m) := \{x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, p \in \Pi_l, q \in \Pi_m \setminus \{0\}\}$$

die Menge aller rationalen Funktionen mit maximalem Zählergrad l und Nennergrad m. Weiters seien $x_0, ..., x_n$ mit $n := l + m$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n$ vorgegebene Daten. Gesucht ist zu gegebenen l, m eine rationale Funktion $r^{(l,m)} \in R(l,m)$, sodass die Interpolationsbedingungen

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : \qquad r^{(l,m)}(x_i) = f_i \tag{1}$$

erfüllt sind.

a) Zeigen Sie, dass eine notwendige Bedingung an das Zählerpolynom p und Nennerpolynom q von $r^{(l,m)}$ gegeben ist durch

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : p(x_i) - f_i q(x_i) = 0 \tag{2}$$

Ist (2) (eindeutig) lösbar?

b) Zeigen Sie: Sei $(p, q) \in (\Pi_l \times \Pi_m \setminus \{0\})$ Lösung von (1), dann ist $\frac{p}{q} \in R(l,m)$, aber $\frac{p}{q}$ löst nicht notwendig (1).

Aufgabe 7:
Approximieren Sie händisch die Funktion $f(x) = \log_2(x)$.

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit den Stützstellen 16, 32 und 64.

(b) Bestimmen Sie die lineare Ausgleichsgerade zu diesen Stützstellen (siehe Kapitel 2) und vergleichen Sie sie mit dem Interpolationspolynom aus (a).

Aufgabe 8:
Gegeben sind die vier Stützpunkte $(0,0)$, $(1,-1)$, $(3,2)$ und $(7,0)$. Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB ein interpolierendes Polynom $p(x)$ sowie die Funktionswerte $p(0.5)$, $p(2.5)$ und $p(6.5)$. Zeichnen Sie unter Verwendung von Matlab die Stützpunkte und $p(x)$ im Intervall $[0,7]$.