Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 7. Juni 2018 17. Mai 2018

4. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \sinh x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $|f(x) - p(x)|$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:

(a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \pi$

(b) Polynom vom Grad 2: x_0, x_1 und $x_2 = \frac{\pi}{2}$

(c) Polynome vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$

(d) Theoretische Abschätzung des Interpolationsfehlers für (c) an der Stelle $\frac{\pi}{3}$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie händisch das Hermiteinterpolationspolynom zu den Stützstellen

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 1, \quad f(4) = 3, \quad f'(4) = 2 \quad f''(4) = 1.$$

Verwenden Sie dazu das verallgemeinerte Nevilleschema.

Aufgabe 3:
Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion

$$|\omega(\bar{x})| = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)...(\bar{x} - x_n)|$$

ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max\limits_{0 \leq \bar{x} \leq 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.

Aufgabe 4:
Approximieren Sie $\sqrt{3}$ durch $p(\frac{1}{2})$, wobei p das Interpolationspolynom 3. Grades zu

$$f(x) = 3^x \quad x = -1, 0, 1, 2$$

darstellt. Verwenden Sie dazu das Neville-Schema. Geben Sie eine Schranke für den Approximationsfehler an.

Aufgabe 5:
Seien die Stützstellen $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gegeben. Berechnen Sie die Lagrange- bzw. die Newton-Basispolynome und stellen Sie diese graphisch dar. Erläutern Sie die wesentlichen Unterschiede.

Aufgabe 6:
Sei

$$R(l,m) := \{x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, p \in \Pi_l, q \in \Pi_m \setminus \{0\}\}$$

die Menge aller rationalen Funktionen mit maximalem Zählergrad l und Nennergrad m. Weiters seien $x_0, ..., x_n$ mit $n := l + m$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n$ vorgegebene Daten. Gesucht ist zu gegebenen l, m eine rationale Funktion $r^{(l,m)} \in R(l,m)$, sodass die Interpolationsbedingungen

$$\forall i \in \{0, ..., n\}: \qquad r^{(l,m)}(x_i) = f_i \tag{1}$$

erfüllt sind.

a) Zeigen Sie, dass eine notwendige Bedingung an das Zählerpolynom p und Nennerpolynom q von $r^{(l,m)}$ gegeben ist durch

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : p(x_i) - f_i q(x_i) = 0 \tag{2}$$

Ist (2) (eindeutig) lösbar?

b) Zeigen Sie: Sei $(p, q) \in (\Pi_l \times \Pi_m \setminus \{0\})$ Lösung von (1), dann ist $\frac{p}{q} \in R(l,m)$, aber $\frac{p}{q}$ löst nicht notwendig (1).

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion $f(x) = x \sin x$, indem Sie 5 Werte für h (etwa 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005,0.0001) wählen und für die Ableitung von f das Interpolationspolynom durch diese Werte bei 0 auswerten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen bei Berechnung mit dem einseitigen und dem zentralen Differenzenquotienten.

Aufgabe 8:
Approximieren Sie händisch die Funktion $f(x) = \log_2(x)$.

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit den Stützstellen 16, 32 und 64.

(b) Bestimmen Sie die lineare Ausgleichsgerade zu diesen Stützstellen (siehe Kapitel 2) und vergleichen Sie sie mit dem Interpolationspolynom aus (a).