Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 12. Juni 2018 3. Juni 2018

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Interpolieren Sie mithilfe von MATLAB die Funktion von Runge

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$$

auf $[-1, 1]$ auf zwei Arten für $n = 20$:

(a) an den äquidistanten Punkten $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$ $j = 0, 1, \dots, n$

(b) an den Nullstellen des $n + 1$-ten Tschebyscheff Polynoms T_{n+1}

Plotten Sie den Fehlerverlauf von beiden Varianten und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2:
Sei $f(x) = \exp(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge paarweise verschiedener Stützstellen aus dem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass für die interpolierenden Polynome p_n vom Grad n mit $p_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, ..., n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| = 0$$

Hinweis: Zeigen Sie mithilfe von Satz 4.2.4, dass das zu p gehörige Interpolationspolynom $\tilde{p}$ die Ungleichung

$$\|p - \tilde{p}\|_\infty \leq \frac{\|N_{n+1}\|_\infty}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

erfüllt, wobei N_{n+1} das $(n + 1)$-te Newton-Basispolynom beschreibt, und schließen Sie daraus, dass

$$\max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{(b - a)^{n+1}\lambda^{n+1}}{(n + 1)!} \|f\|_\infty$$

gilt. Argumentieren Sie anschließend, warum diese obere Schranke für wachsende n gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3:
Verwenden Sie die Trapezregel und Simpsonregel, um das Integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ anzunähern. Wählen Sie $h = \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}, \frac{1}{42}, \frac{1}{48}$ und berechnen Sie jeweils den Fehler. Stellen Sie diesen in einem doppellogarithmischen Plot dar.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete MATLAB Funktion als Referenzlösung.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_{1}^{3} (-x^3 + 4x^2 + 1)\, dx$ mit der Trapezregel für $h = 0.4$. Wie groß wird der relative Fehler der Integralnäherung? Bestimmen Sie eine Schrittweite h so, dass mit der Simpsonregel ein absoluter Fehler kleiner als 10^{-3} erreicht wird.

Aufgabe 5:
Zu programmieren ist die 2D-Mittelpunktregel für das Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$. Schreiben Sie dazu eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [I] = mittelp2d(f,h)`, die zu einem gegebenen *function-handle* `f` und einer Schrittweite `h` (Annahme: $h = 2/k,\ k \in \mathbb{N}$) das Integral $\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$ zu `I` approximiert.

Anleitung: Zerlegen Sie das gegebene Quadrat in Quadrate mit Seitenlänge h. Werten Sie die Funktion an den Mittelpunkten dieser kleiner Quadrate aus und summieren Sie die Werte auf und skalieren Sie mit h^2 (siehe Abbildung 1).

Testen Sie die Funktion anhand der Funktionen $f(x,y) := \exp(x+y)$ und $g(x,y) := \exp(10\,(x+y))$, sowie einer von Ihnen selbst gewählten Funktion. Berechnen Sie die exakten Integralwerte, um die absoulten Fehler berechnen zu können. Variieren Sie die Gitterweite h und stellen Sie den Fehler in einem doppeltlogarithmischen Plot über der Gitterweite dar.

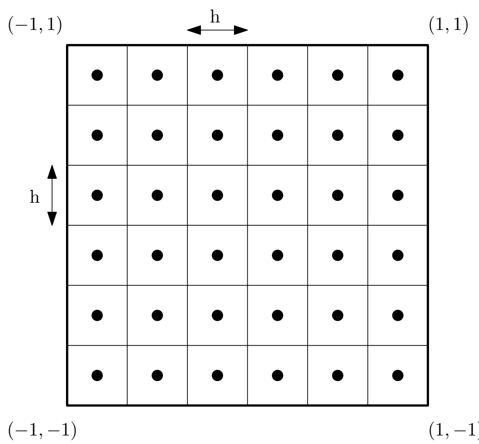

Abbildung 1: 2D-Quadraturschema mittels Mittelpunktregel

Aufgabe 6:
Sei $f \in C([0,3])$. Bestimmen Sie die interpolatorische Quadraturformel der Form

$$I(f) := c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$$

zur Approximation des Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$. Finden Sie den maximalen Polynomgrad $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall p \in \Pi_k : \quad I(p) = \int_0^3 p(x)\,dx$$

erfüllt ist.

Aufgabe 7:
Eine Quadraturformel I hat die Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn durch sie alle Polynome aus Π_{m-1} exakt integriert werden. Sei nun eine beliebige Quadraturformel I auf dem Intervall $[a,b]$ gegeben mit $n+1$ Quadraturknoten $x_0, ..., x_n$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von I mindestens n und höchstens $2n+2$ beträgt.
Hinweis: Betrachten Sie für den zweiten Fall das Quadrat des $n+1$ Newton-Basispolynoms $\omega(x)$, also

$$\omega(x)^2 = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right)^2$$

und berechnen Sie $I(\omega^2)$.

Aufgabe 8:
Argumentieren Sie ohne Unterstützung Ihres Rechners, mit wie vielen Funktionsauswertungen das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} berechnet werden kann, basierend auf der

a) Trapezregel.

b) Simpson-Regel.

Hinweis: Benutzen Sie die Fehlerdarstellungen aus Tabelle 5.1.