Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Johann Faschingleitner

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2018

Vorzubereiten bis: 14. Juni 2018 3. Juni 2018

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Interpolieren Sie mithilfe von MATLAB die Funktion von Runge

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$$

auf $[-1, 1]$ auf zwei Arten für $n = 20$:

(a) an den äquidistanten Punkten $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$ $j = 0, 1, \ldots, n$

(b) an den Nullstellen des $n + 1$-ten Tschebyscheff Polynoms T_{n+1}

Plotten Sie den Fehlerverlauf von beiden Varianten und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2:
Sei $f(x) = \exp(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge paarweise verschiedener Stützstellen aus dem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass für die interpolierenden Polynome p_n vom Grad n mit $p_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, ..., n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| = 0$$

Hinweis: Zeigen Sie mithilfe von Satz 4.2.4, dass das zu p gehörige Interpolationspolynom $\tilde{p}$ die Ungleichung

$$\|p - \tilde{p}\|_\infty \leq \frac{\|N_{n+1}\|_\infty}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

erfüllt, wobei N_{n+1} das $(n + 1)$-te Newton-Basispolynom beschreibt, und schließen Sie daraus, dass

$$\max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{(b - a)^{n+1}\lambda^{n+1}}{(n + 1)!} \|f\|_\infty$$

gilt. Argumentieren Sie anschließend, warum diese obere Schranke für wachsende n gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3:
Verwenden Sie die Simpsonregel und 3/8-Regel, um das Integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ anzunähern. Wählen Sie $h = \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}, \frac{1}{42}, \frac{1}{48}$ und berechnen Sie jeweils den Fehler. Plotten Sie den Fehler mittels der Funktion loglog.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete MATLAB Funktion als Referenzlösung.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^3 (-4x^3 + x^2 - x + 1)\, dx$ mit der Simpsonregel für $h = 0.4$. Wie groß wird der relative Fehler der Integralnäherung? Bestimmen Sie eine Schrittweite h so, dass mit der Trapezregel ein absoluter Fehler kleiner als 10^{-3} erreicht wird.

Aufgabe 5:
Quadraturformeln werden häufig auf dem Standardintervall $[-1, 1]$ angegeben. Diese können leicht mittels Substitution auf allgemeine Intervalle umgerechnet werden. Realisieren Sie diese Idee, indem Sie eine Funktion mit der Signatur `function nodes = Trafo(X,a,b)` schreiben, die zu gegebenen Gauß-Quadraturknoten X auf dem Standardintervall $[-1, 1]$ die transformierten Knoten `nodes` auf dem Intervall $[a, b]$ zurückliefert. Müssen bei einer solchen Transformation die Gewichte ebenfalls transformiert werden?

Aufgabe 6:
Programmieren Sie die 2D-Gaussquadratur mit den Quadraturknoten (angegeben bezüglich dem Standardintervall $[-1, 1]$)

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

und den Gewichten

$$c_0 = \frac{5}{9}, c_1 = \frac{8}{9}, c_2 = \frac{5}{9}$$

für das Einheitsdreieck T mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0)$ und $(0, 1)$. Schreiben Sie dazu eine MATLAB-Funktion mit der Signatur `function [I] = Gauss2d(f)`, die zu einem gegebenen *function-handle* `f` das Integral $\int_T f(x, y)\, d(x, y)$ zu `I` approximiert. Benutzen Sie dafür die sogenannte Duffy-Transformation

$$\begin{aligned} \Psi : [0, 1]^2 &\longrightarrow T \\ (x, y) &\mapsto (x, (1 - x)y) \end{aligned}$$

Anleitung: Mit dem Transformationssatz lässt sich das 2-dimensionale Integral über T zurückführen auf zwei eindimensionale Integrale via

$$\int_T f(x, y)\, d(x, y) = \int_{[0,1]^2} f(\Psi(x, y))|det(d\Psi(x, y))|\, d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) det(\Psi(x, y))\, dx \right) dy$$

Werten Sie die Funktion an den auf das Intervall $[0, 1]$ transformierten Gauss-Quadraturknoten aus (benutzen Sie dafür Ihre Funktion `Trafo()` aus Beispiel 4) und multiplizieren Sie das Ergebnis mit den Gewichten c_i. Anschließendes Summieren liefert Ihnen die gewünschte Approximation für das Integral.

Testen Sie die Funktion anhand der Funktionen $f(x, y) := \exp(x + y)$ und $g(x, y) := \exp(10\,(x + y))$, sowie einer von Ihnen selbst gewählten Funktion. Berechnen Sie die exakten Integralwerte, um die absoulten Fehler berechnen zu können.

Aufgabe 7:
Eine Quadraturformel I hat die Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn durch sie alle Polynome aus Π_{m-1} exakt integriert werden. Sei nun eine beliebige Quadraturformel I auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben mit $n + 1$ Quadraturknoten $x_0, ..., x_n$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von I mindestens n und höchstens $2n + 2$ beträgt.
Hinweis: Betrachten Sie für den zweiten Fall das Quadrat des $n + 1$ Newton-Basispolynoms $\omega(x)$, also

$$\omega(x)^2 = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right)^2$$

und berechnen Sie $I(\omega^2)$.

Aufgabe 8:
Argumentieren Sie ohne Unterstützung Ihres Rechners, mit wie vielen Funktionsauswertungen das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} berechnet werden kann, basierend auf der

a) Trapezregel.

b) Simpson-Regel.

Hinweis: Benutzen Sie die Fehlerdarstellungen aus Tabelle 5.1.