

# Grundlagen der Physik 1b

## VO-Ausarbeitung

Benjamin Kolouch - MNR.: 12308592

12. Juni 2024

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Reale feste und flüssige Körper</b>	<b>3</b>
1.1	Interatomare Wechselwirkung (Paarwechselwirkung)	3
1.2	Atomanordnung	6
1.2.1	Festkörper	6
1.2.2	Gase	7
1.2.3	Flüssigkeiten	7
1.2.4	Fernordnung und Nahordnung	8
1.2.5	Aggregatzustand	8
1.3	Deformierbare feste Körper	9
1.3.1	Dehnung und Querkontraktion	12
1.3.2	Stauchung und Querausdehnung	13
1.3.3	Allseitiger Druck	14
1.3.4	Scherung	15
1.3.5	Torsion	15
1.3.6	Biegung	16
1.3.7	Deformationsarbeit	18
1.3.8	Elastische Hysterese	19
1.4	Reibung zwischen festen Körpern	20
1.4.1	Haftreibung	20
1.4.2	Gleitreibung	22
1.4.3	Rollreibung	23
1.5	Ruhende Flüssigkeiten, Hydrostatik	23
1.5.1	Oberflächen von Flüssigkeiten	23
1.5.2	Statischer Druck in einer Flüssigkeit	25
1.5.3	Schweredruck	26
1.5.4	Auftrieb und Schwimmen	27
1.5.5	Oberflächenspannung	30
1.5.6	Grenzflächen und Haftspannung	31
1.5.7	Kapillarität	32

<b>2</b>	<b>Gase</b>	<b>34</b>
2.1	Makroskopische Betrachtung . . . . .	34
2.2	Boyle-Mariotte Gesetz . . . . .	35
2.3	Kompressibilität von Gasen . . . . .	35
2.4	Gesetz von Gay-Lussac . . . . .	36
2.5	Proportionalität . . . . .	37
2.6	Barometrische Höhenformel . . . . .	37
2.7	Kinetische Gastheorie . . . . .	40
2.7.1	Modell des idealen Gases . . . . .	40
2.7.2	Grundgleichung der kinetischen Gastheorie . . . . .	41
2.7.3	Gleichverteilungssatz/Äquipartitionstheorem . . . . .	43
2.7.4	Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	44
2.7.5	Geschwindigkeitsverteilung Analyse . . . . .	47
2.7.6	Stoßquerschnitt und mittlere freie Weglänge . . . . .	50
2.7.7	Transportprozess in Gasen . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Strömende Flüssigkeiten und Gase</b>	<b>52</b>
3.1	Euler-Gleichung . . . . .	52
3.2	Kontinuitätsgleichung . . . . .	53
3.3	Bernoulli-Gleichung . . . . .	53
3.4	Strömung einer idealen Flüssigkeit . . . . .	54
3.5	Stokessches Gesetz . . . . .	55
3.6	Laminare Strömung durch Rohre . . . . .	55
3.7	Navier-Stokes Gleichung . . . . .	56
3.8	Magnuseffekt . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Wärmelehre</b>	<b>57</b>
4.1	Wärmeenergie . . . . .	57
4.2	Thermische Ausdehnung . . . . .	57
4.3	Wärmemenge und innere Energie . . . . .	58
4.4	Wärmekapazität und spezifische Wärme . . . . .	58
4.5	spezifische Molwärme und innere Energie idealer Gase . . . . .	58
4.6	Spezifische Wärme fester Körper . . . . .	59
4.7	Konvektion . . . . .	59
4.8	Wärmeleitung . . . . .	60
4.9	Die Hauptsätze der Thermodynamik . . . . .	61
4.9.1	Arbeit . . . . .	61
4.9.2	Erwärmung eines Gases . . . . .	63
4.9.3	Arten von Systemen . . . . .	63
4.9.4	0. Hauptsatz . . . . .	63
4.9.5	1. Hauptsatz . . . . .	63
4.9.6	2. Hauptsatz . . . . .	67
4.9.7	Carnotsche Kreisprozess . . . . .	67
4.9.8	Entropie . . . . .	70

4.9.9	3. Hauptsatz	72
4.10	Gibbssche Phasenregel	72
4.11	Thermodynamik realer Gase	72
4.12	Van-der-Waalsche Zustandsgleichung	73

# 1 Reale feste und flüssige Körper

## 1.1 Interatomare Wechselwirkung (Paarwechselwirkung)

Atome sind elektrisch neutrale Teilchen. In großem Abstand gib es (fast) keine elektrostatische Wechselwirkung. In kurzem Abstand gibt es Abstoßung- und Anziehungskräfte zwischen Atomen. Die Elektronen und Protonen stoßen ihresgleichen ab (durch gleiches Ladungsvorzeichen - Elektronen negativ, Protonen positiv). Gegenseitig haben sie aber eine Anziehung.

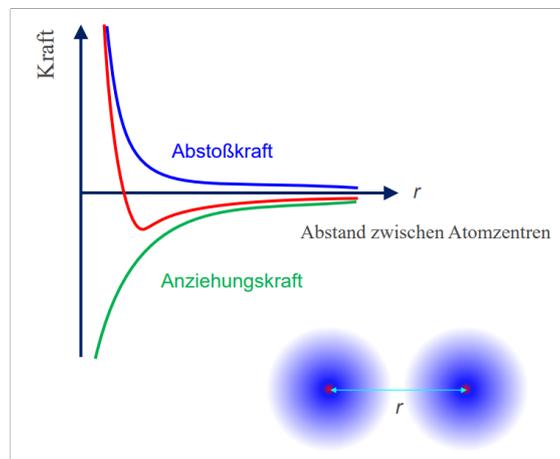


Abb. 1: Wechselwirkung von Atomen

Beide dieser Kräfte überlagern sich und ergeben somit die resultierende Kraft (rote Funktion).

$r < 0$  ...Abstoßungskräfte überwiegen

$r > 0$  ...Anziehungskräfte überwiegen

Bei einem Abstand  $r_0$  sind die Kräfte ausgeglichen. In Summe ist hier eine Kraft von null:

$$r_0 : F(r_0) = 0$$

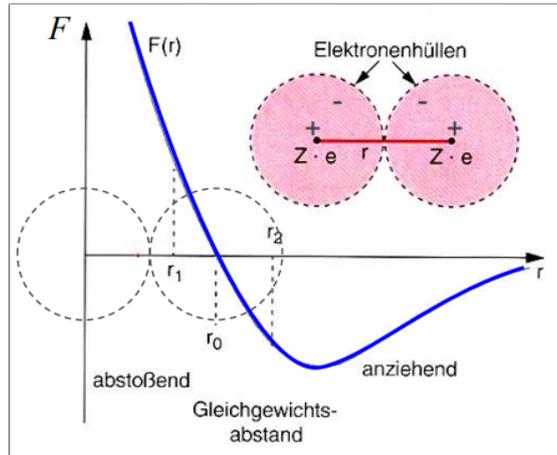


Abb. 2: Gleichgewichtsabstand

Aus Kraft der Paarwechselwirkung kann die potentielle Energie hergeleitet werden.

$$3\text{-D} \implies \vec{F} = -\nabla E_{pot}$$

$$1\text{-D} \implies F = -\frac{dE_{pot}}{dr}$$

Die potentielle Energie ergibt sich dann wie folgt aus dem Integral über die Kraft nach dem Weg:

$$E_{pot}(r) = -\int_{\infty}^r F(r) dr$$

Abhängig davon, ob die Kraft positiv, negativ oder den Wert null annimmt, kann auch eine Korrelation zur potentiellen Energie festgestellt werden:

Tabelle 1: Abstand zwischen Atomzentren - Vergleich von Kraft und Energie

	$r < r_0$	$r = r_0$	$r > r_0$
$F(r)$	positiv	0	negativ
$E(r)$	nimmt ab	im Minimum	nimmt zu

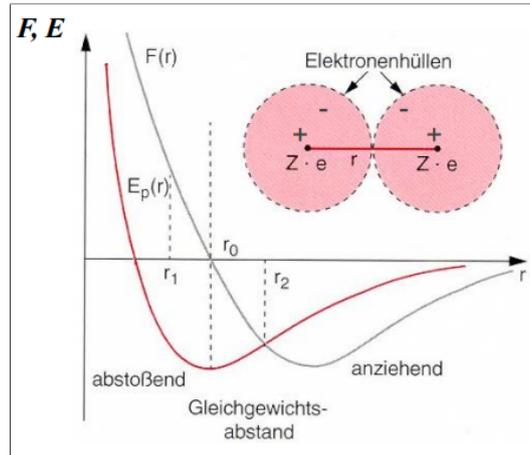


Abb. 3: Gleichgewichtsabstand

Mit dem Lennard-Jones-Potential kann die potentielle Energie der Paarwechselwirkung berechnet werden. Hier gibt es zwei Summanden die jeweils die Energie der Abstoßung (12. Potenz) und der Anziehung (6. Potenz) repräsentieren.

$$E_{pot} = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

Das  $\epsilon$  ist hierbei die Energie des Minimum und das  $\sigma$  der Abstand des Energie-Nullpunktes.

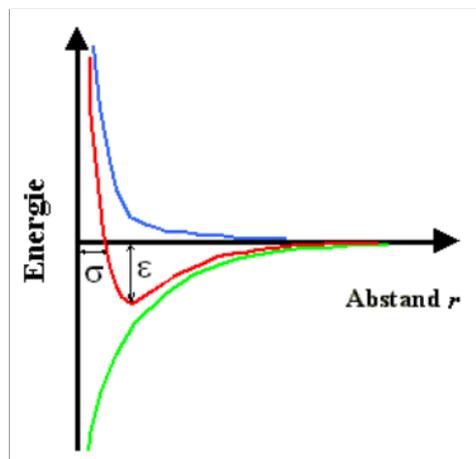


Abb. 4: Lennard-Jones-Potential

## 1.2 Atomanordnung

### 1.2.1 Festkörper

Atome sind in einem regelmäßigem Gitter angeordnet. Diese sind kristalline Festkörper mit 3-dimensionaler periodischer Anordnung. Der Begriff Fernordnung definiert diese regelmäßigen und kontinuierlichen Anordnungen von Molekülen und Atomen in kristallinen Festkörpern.

Die Kristallstruktur wird mit 3 unterschiedlichen Anordnungstypen beschrieben:

- FCC: face-centred cubic (DE: Kubisch flächenzentriertes Gitter)
- BCC: body centered cubic (DE: Kubisch raumzentriertes Gitter)
- HCP: hexagonal close-packed crystal (DE: Hexagonal dichteste Kugelpackung)

Kristalle können formal als 3-dimensionaler Körper dargestellt werden. Alle Atome sind Punkte an den Verbindungslinien des Körpers. Der Nullpunkt wird mit Atom  $A_0$  definiert und bildet einen Ortsvektor  $\vec{r}_i$  zu einem beliebigem anderen Atom  $A_i$ . Die Basisvektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  spannen eine Einheitszelle auf (in nachfolgender Grafik rot dargestellt). Sonderfälle gibt es, wenn  $a = b = c$  und  $\alpha = 90^\circ$  sind. Dann ist die Einheitszelle ein Würfel.

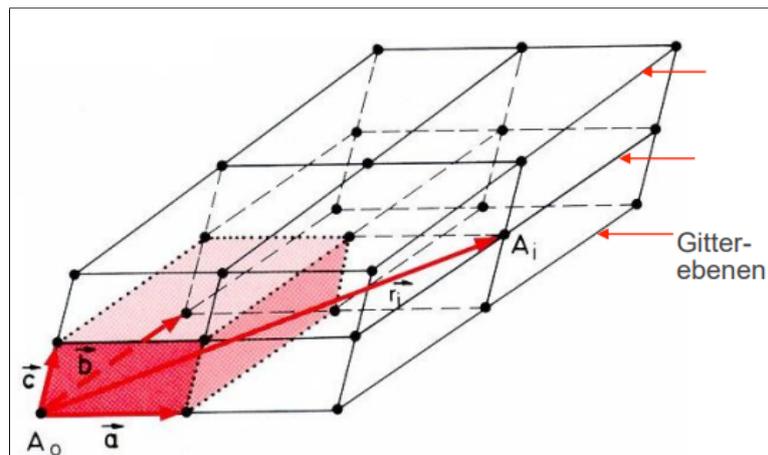


Abb. 5: Kristalliner Festkörper

Bei Festkörpern in einer Gitteranordnung sind alle Atome an ihrem Gitterplatz. Sie können diesen auch nicht verlassen. Da sich die Atome aber um ihre Gleichgewichtslage bewegen, können diese elektrischen Kräfte auch mit Federn dargestellt werden. Falls sich Atome zu nah beieinander befinden, so überwiegen die Abstoßungskräfte und sie werden voneinander weggedrückt. Ab einem gewissen Abstand ( $r_0$ ) sind diese Kräfte aber wieder anziehend und somit schwingt das Atom in der kristallinen Struktur hin und her.

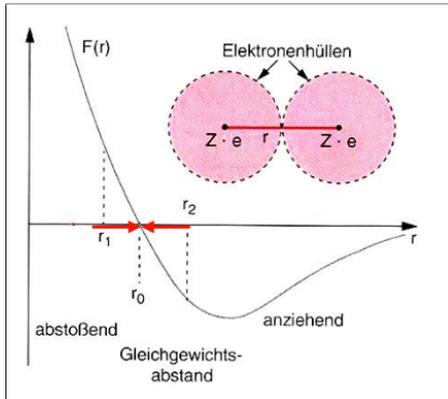


Abb. 6: Elektrische Rückstellkraft

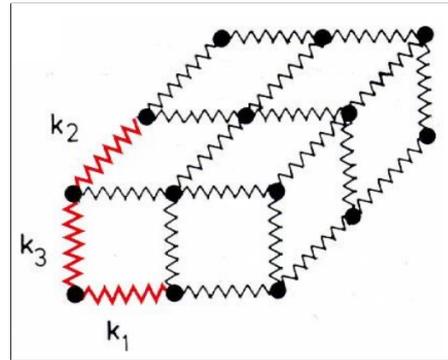


Abb. 7: Elektrische Rückstellkraft Gitter

### 1.2.2 Gase

Die Dichte von Gasen ist in etwa um den Faktor  $10^3$  kleiner als die von Festkörpern. Dadurch sind die Inter-molekularen Abstände bei Gasen auch um etwa 10 mal größer als  $r_0$ . Dadurch haben Gase auch eine geringere Wechselwirkung. Bei Idealen Gasen gibt es eine Vollständige Unordnung was bedeutet das Teilchen voneinander unabhängig sind. Dies lässt sich auf Basis der Stochastik beschreiben. Bei Realen Gasen gibt es allerdings noch eine (anziehende) Wechselwirkung aufeinander.

### 1.2.3 Flüssigkeiten

Flüssigkeit ist weder ein imperfekter Festkörper noch ein dichtes Gas.

Kristall (Perfekte Unordnung)  $\longrightarrow$  Flüssigkeit  $\longleftarrow$  Gas (Vollständige Unordnung)

Es wird unterteilt in die Fernordnung (Atome sind im Gitter eines Festkörpers) und Nahordnung (Atome sind nicht mehr in einem Gitter geordnet und es ergibt sich eine Flüssigkeit). Atome können demnach die Gitterplätze des Festkörpers verlassen wodurch ein weniger stark geordneter Zustand entsteht. Dies ist der Übergang in den flüssigen Zustand.

$$\rho_{Gas} \ll \rho_{Fl} \leq \rho_{Fest}$$

Die Ordnung bezieht sich immer auf die Raumfüllung mit Atomen auf die dichteste mögliche Packung wie in folgender Grafik dargestellt:



Abb. 8: Ordnung von Atomen

### 1.2.4 Fernordnung und Nahordnung

Die Fern- und Nahordnung kann von der radialen Verteilfunktion abgelesen werden. Hier setzt man sich in die Mitte eines Atoms und geht einen Radius nach außen ab und misst die Wahrscheinlichkeit anderer Atome in dem gewissen Radius. Je nach Material und Aggregatzustand ist diese Wahrscheinlichkeit anders. Bei Flüssigkeiten spricht man von einer Nahordnung da hier die Wahrscheinlichkeit in der ersten Koordinationssphäre am höchsten ist. Bei Festkörpern ist die Wahrscheinlichkeit auf die Äußeren Koordinationssphären verteilt, demnach handelt es sich bei Festkörpern um eine Fernordnung.

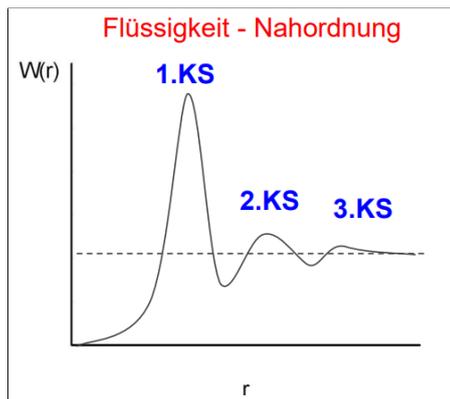


Abb. 9: Nahordnung

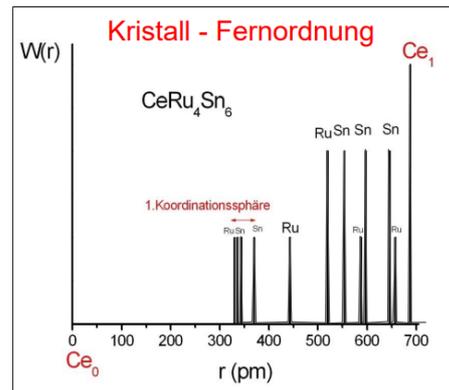


Abb. 10: Fernordnung

### 1.2.5 Aggregatzustand

Der jeweilige Aggregatzustand hängt vom Verhältnis der kinetischen und potentiellen Energie ( $\frac{E_{kin}}{E_{pot}}$ ) und damit von der Temperatur  $T$  und der Bindungsenergie ab.

Tabelle 2: Aggregatzustand

Festkörper	Für $T \ll T_{schmelz}$	$\overline{E_{kin}} \ll E_{pot}(r_0) \Rightarrow E_{ges} < 0$
Flüssigkeit	Für $T > T_{schmelz}$	$\overline{E_{kin}} \approx E_{pot}(r_0) \Rightarrow E_{ges} \leq 0$
Gas	Für $T > T_{sieden}$	$\overline{E_{kin}} \gg E_{pot}(r_0) \Rightarrow E_{ges} \gg 0$

### 1.3 Deformierbare feste Körper

Unter äußere Krafteinwirkung kann ein fester Körper seine Gestalt ändern. Dabei wird unterschieden zwischen elastischen und plastischen Körpern. Bei den elastischen Körpern verschwindet die Deformation nach Beendigung der Krafteinwirkung wobei plastische Körper eine Formänderung erhalten.

Wenn ein elastischer Körper einer Zugkraft ausgesetzt wird, dann erhält dieser eine Längenänderung  $L \rightarrow L + \Delta L$ . Wenn das  $\Delta L \ll L$  (so, dass es nicht zur plastischen Verformung kommt) kann die aufgewendete Kraft über das Hookesche Gesetz hergeleitet werden:

$$F = k \cdot \Delta L$$

$k$  ist hierbei die Federkonstante welche Materialabhängig ist (ist proportional zu  $\frac{A}{L}$ ). In weiterer Folge kann die Kraft auch über das Elastizitätsmodul  $E$  berechnet werden. Diese ist eine Materialabhängige Konstante die allerdings nicht Körperformabhängig ist. Die Einheit für das Elastizitätsmodul ist  $\frac{N}{m^2}$ .

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

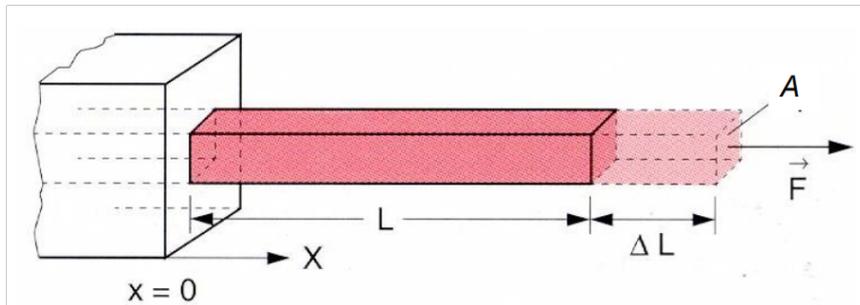


Abb. 11: Längenänderung

Aus dem Hookeschen Gesetz ergeben sich noch zwei weitere Parameter. Die Krafteinwirkung auf den Flächenquerschnitt wird mit  $\sigma = \frac{F}{A}$  umgeschrieben und in die Zugspannung umbenannt. Das Verhältnis der Längendehnung wird ebenfalls zusammengefasst und ergibt sich als die relative Dehnung  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ . Wenn man nun alle diese Einheiten zusammenführt und in das Hookesche Gesetz übernimmt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Daraus folgt, dass die Spannung der Dehnung proportional ist. Die aufgewendete Kraft um ein Objekt zu dehnen entspricht in Bezug auf dessen atomare Struktur einem linearen Verlauf. Die  $E_{Pot}$  der Paarwechselwirkung ist in diesem Abschnitt parabolisch.

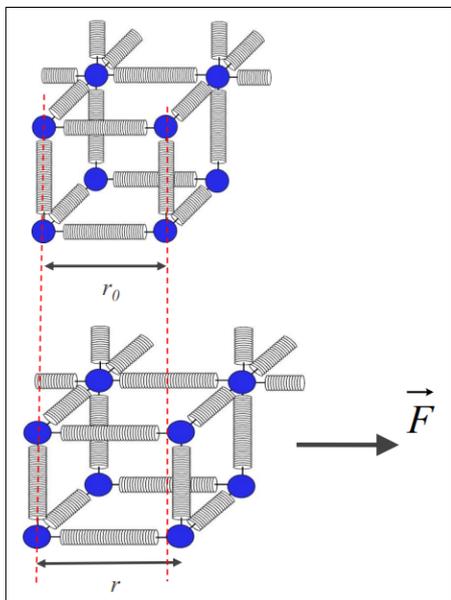


Abb. 12: Ausdehnung eines Körpers

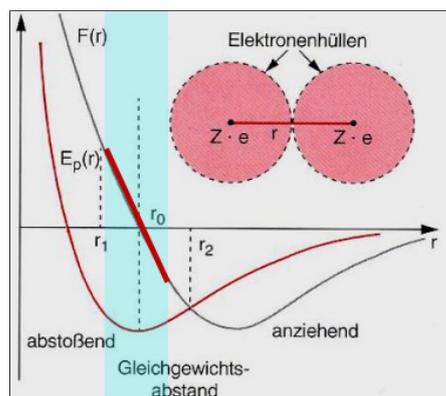


Abb. 13: Krafteinwirkung bei Ausdehnung

Mittels Taylorentwicklung der  $E_{Pot}$  Funktion um die Gleichgewichtslage  $r_0$  kann eine Annäherung an die  $E_{Pot}$  Funktion durchgeführt werden. Hierbei zeigt sich, dass für angenäherte Funktionen mit  $n \geq 3$  nur eine kleine Auslenkung zu sehen ist. Daher können Terme die größer als  $n \geq 3$  sind vernachlässigt werden. Daraus erschließt sich, dass bei größeren Auslenkungen aus der Ruhelage nicht lineare Rückstellkräfte ergeben und somit Körper plastisch verformt werden können.

Über das Spannungs-Dehnungs-Diagramm kann abgelesen werden, für welche Zugspannung  $\sigma$  die relative Dehnung  $\varepsilon$  erhöht wird.

- AP - linear-elastischer Bereich (Proportional, Hookesches Gesetz)
- PE - nichtlinear-elastischer Bereich (Noch reversibel. Nach wegnahme der Zugspannung geht der Körper wieder in seine Ausgangsform zurück)
- EB - plastischer Bereich (Dehnung wächst rasche als Zugspannung an)
- EZ - Fließbereich (Spannung ändert sich nur wenig mit Dehnung, Struktureinheiten gleiten ab, plastische nicht reversible Verformung)

- Z - Einschnurrung (Material wird dünner da sich Objekt in die Länge zieht)
- B - Bruch

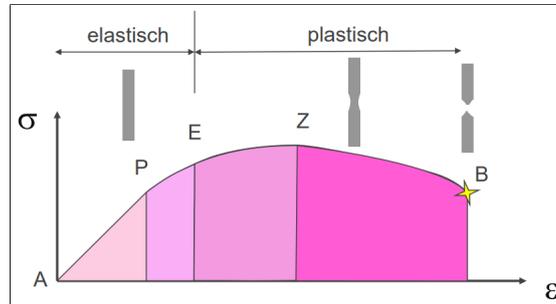


Abb. 14: Spannungs-Dehnungsdiagramm

Wenn ein Körper einmal im plastischen Bereich ist, geht seine Ausgangsform nach wegnahme der Kraft nicht in ursprüngliche Form zurück sondern ändert die Länge irreversibel. Grund dafür ist, dass sich die zwischenatomaren Abstände proportional zur Längenänderung ausgleichen:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta L}{L}$$

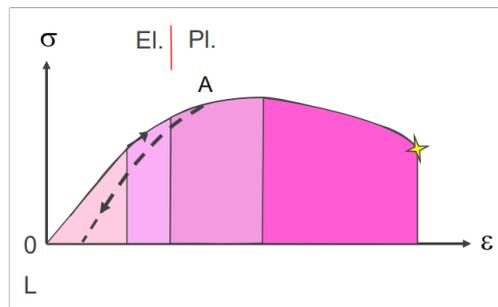


Abb. 15: Spannungs-Dehnungsdiagramm

Festkörper sind in Atomlagen aufgebaut. Jedes Atom ist im Gleichgewichtszustand mit den benachbarten Atomen. Wenn nun eine hohe Kraft angelegt wird, die diese Atomlagen so verschieben, dass die Gleichgewichtslagen der Atomlagen nicht mehr mit den am Anfang benachbarten Atomlagen übereinstimmen kommt es zur plastischen Deformation. Die Ursache ist, dass die Atome nun näher an einer neuen Ruhelage liegen und diese dann auch einnehmen. Der Abstand zu den benachbarten Atomlagen ist zu groß geworden, so dass die Rückstellkräfte nun von anderen Atomlagen kommen. Daher finden die Atomlagen nun auch eine neue Ruhelage.

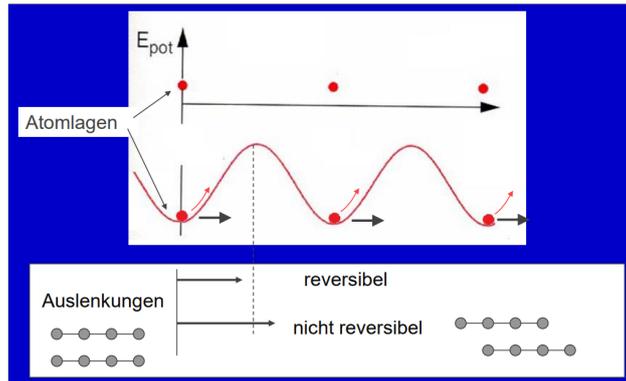


Abb. 16: Plastische Deformation Ausgangslage

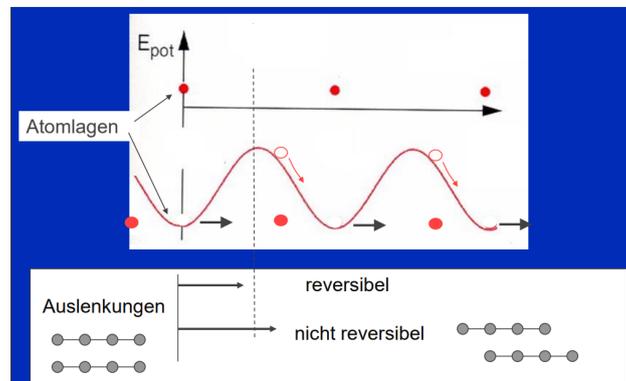


Abb. 17: Plastische Deformation Lage nach Verschiebung

Unter der Einwirkung von Spannung können verschiedene Arten von Verformungen erreicht werden:

- Dehnung
- Stauchung
- Allseitiger Druck
- Scherung
- Torsion
- Biegung

### 1.3.1 Dehnung und Querkontraktion

Bei der Dehnung wird ein Körper in die Länge gezogen, so dass sich dadurch der Querschnitt kontrahiert. Dadurch ändert der Querschnitt aber in geringerem Ausmaß als die

Länge:

$$L \rightarrow L + \Delta L$$

$$d \rightarrow d - \Delta d$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} - 2 \frac{\Delta d}{d}$$

Dadurch entsteht ein neuer Parameter der das Verhältnis der relativen Querkontraktion und der relativen Dehnung darstellt. Dieser Parameter ist die Kontraktionszahl  $\mu$  (auch Poissonzahl genannt). Diese entspricht typischerweise einem Wert von  $0.2 < \mu < 0.4$ .

$$\mu \equiv \frac{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)} \Rightarrow \text{Verhältnis} = \frac{\text{rel. Querkontraktion}}{\text{rel. Dehnung}}$$

Zusammengefasst kann man dies auch mit der relativen Dehnung darstellen:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} - 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L} \left(1 - 2 \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}}\right) = \varepsilon(1 - 2\mu)$$

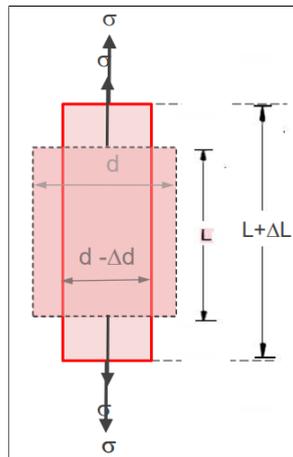


Abb. 18: Dehnung mit Querkontraktion

### 1.3.2 Stauchung und Querausdehnung

Bei der Stauchung wird ein Druck auf die Seiten angelegt, sodass der Körper sich zusammenpresst. Dabei wird der Querschnitt gedehnt. Ähnlich wie bei der Dehnung kommen hier wieder die selben Formeln zum Einsatz, diesmal aber mit umgekehrten Vorzeichen. Der angelegte Druck  $p$  entspricht hierbei  $p = -\sigma$ .

$$L \rightarrow L - \Delta L$$

$$d \rightarrow d + \Delta d$$

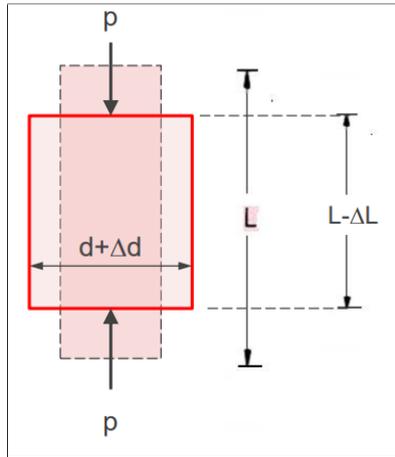


Abb. 19: Stauchung mit Querausdehnung

### 1.3.3 Allseitiger Druck

Bei allseitigem Druck kommt es zur Volumenreduktion. Hierbei ist der Druck wieder  $p = -\sigma$ .

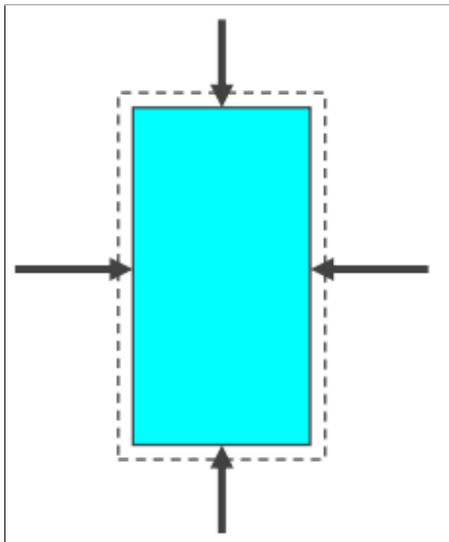


Abb. 20: Allseitiger Druck

Es werden hierfür wieder zwei neue Begriffe eingeführt: Kompressionsmodul  $K$  und Kompressibilität  $\kappa$ :

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V}$$

$$\kappa = \frac{1}{K}$$

Das Kompressionsmodul  $K$  beschreibt dabei die relative Volumenänderung zufolge eines Drucks. Die Kompressibilität  $\kappa$  beschreibt in der Hydrostatik das Maß der Druckabhängigkeit von  $\rho(p)$ . Die Kompressibilität kann auch folgendermaßen definiert werden:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$$

### 1.3.4 Scherung

Bei der Scherung greifen Kräfte Tangential an eine Fläche an. Dabei entsteht eine Schub-/Scherspannung  $\vec{\tau}$ :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{d^2}$$

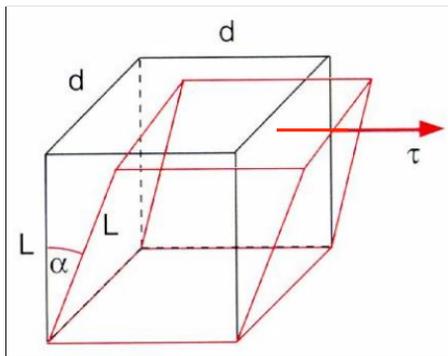


Abb. 21: Scherung

Bei einem Quader werden die Kanten dadurch um einen Winkel  $\alpha$  gekippt. Bei sehr geringem Winkel ( $\alpha \ll 1$ ) ist die Scherspannung proportional zum Scherwinkel. Es wird hier zusätzlich das Schubmodul (oder auch Schermodul/Torsionsmodul)  $G$  eingeführt:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Dadurch entsteht eine reine Formänderung, das Volumen aber bleibt gleich.

### 1.3.5 Torsion

Bei der Torsion ergibt sich eine Scherspannung die in radialer Komponente wirkt. Der Körper wird hierbei in Teilkomponenten betrachtet. Hierbei verwendet man Zylinderkoordinaten und definiert die Fläche aufgeteilt in Zylinderhülsen  $dr$  und in radiale Segmente  $d\varphi$ .

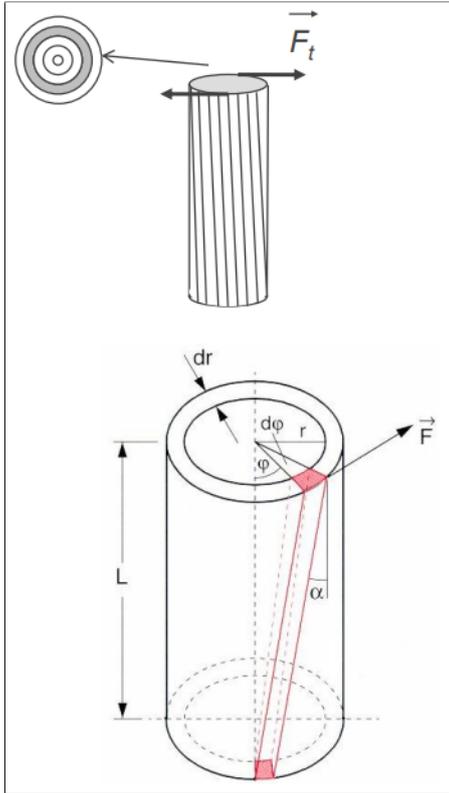


Abb. 22: Torsion eines Drahtes

Bei Drehung des oberen Endes um einen gewissen Winkel  $\varphi$  entsteht eine Scherung der Säule um  $\alpha$ . Wenn  $r\varphi \ll L$  ist, dann kann angenommen werden, dass  $\tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{r\varphi}{L}$  ist. Dies in die Formel der Scherspannung eingesetzt ergibt sich zu:

$$\tau = G\alpha = G\frac{r\varphi}{L}$$

Somit entsteht unter der Kraft eine Scherung des Ringsegmentes ( $r_{neu} = r + dr$ ):

$$dF = \tau dA = \tau 2\pi r dr = G\frac{r\varphi}{L} 2\pi r dr = G\frac{2\pi r^2 dr \cdot \varphi}{L}$$

Das Drehmoment berechnet sich dann wie folgt:

$$dD = r \cdot dF = G\frac{2\pi r^3 dr \cdot \varphi}{L}$$

Mit der Formel des Drehmoments kann man die Verdrillung des gesamten Zylinders (Drahtes) errechnet werden. Dadurch muss das Integral mit den Grenzen des Radius des Zylinders ausgerechnet werden.

$$D = \int dD = \int_0^R G\frac{2\pi r^3 dr \cdot \varphi}{L} = \frac{2\pi G \cdot \varphi}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi GR^4}{2L} \cdot \varphi$$

Bei einer Torsion gibt es auch eine rücktreibende elastische Kraft die wiederum ein Drehmoment in die Gegenrichtung erzeugt. Wenn das angelegte Drehmoment gleich groß ist wie das der rücktreibenden Kräfte, dann ist ein Gleichgewichtszustand erreicht und der Zylinder dreht sich nicht:

$$D = -\frac{\pi GR^4}{2L} \cdot \varphi \equiv -D_r \cdot \varphi$$

$D_r$  wird als Richtmoment bezeichnet und stellt das Drehmoment pro Winkeleinheit da.

### 1.3.6 Biegung

Bei der Biegung wird ein Körper der aus starren Segmenten besteht an einem Ende mit einer Kraft ausgelenkt. Dadurch entstehen Kompression und Dehnung an den einzelnen

Segmentflächen. Im mittleren Verlauf des Körpers ist die neutrale Faser die sich bei der Auslenkung nicht dehnt oder komprimiert.

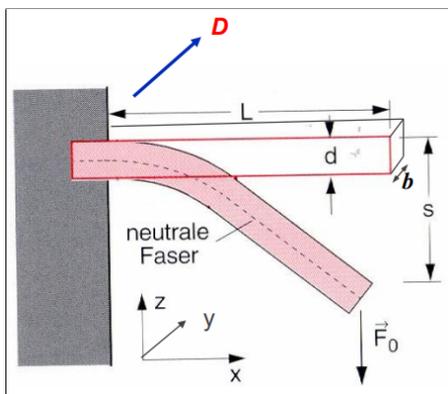


Abb. 23: Biegung eines Balkens

Man berechnet hierbei immer den Biegepfel  $s$ . Dieser ist mit folgender Formel herzuleiten:

$$s = \frac{L^3}{3EB} F$$

Wobei  $F$  die gerichtete Kraft in entsprechende Richtungskomponente ist,  $L$  die Länge des Körpers,  $E$  das Elastizitätsmodul und  $B$  das Flächenträgheitsmoment welches spezifisch an die Form des Körpers angepasst werden muss.

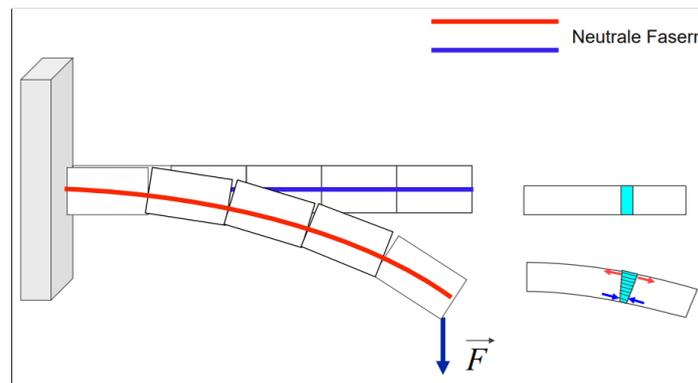


Abb. 24: Dehnung und Kompression der Balkensegmente bei der Biegung

Um das Flächenträgheitsmoment  $B$  zu berechnen muss zuerst der spezifische Querschnitt des Körpers berechnet werden:

$$a = \int \int dydz$$

Weiteres muss die Richtung der Kraft  $z$  definiert werden.

$$B = \int \int z^2 dydz$$

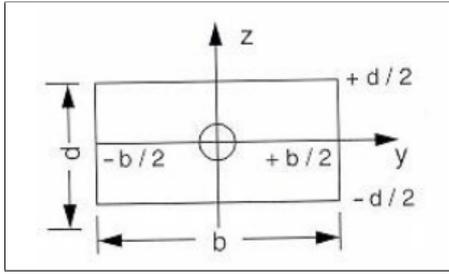


Abb. 25: Querschnitt Balken

Am Beispiel eines rechteckigen Balken muss die Integration für den Querschnitt folgendermaßen aussehen:

$$a = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dy dz$$

Führt man die Werte für den oben genannten Querschnitt und der Kraft  $z$  zusammen, so ergibt sich das Flächenträgheitsmoment folgendermaßen:

$$B = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 dy dz = \frac{1}{12} d^3 b$$

Durch einsetzen in die Formel des Biegungs Pfeil  $s$  ergibt sich:

$$s = \frac{L^3}{3EB} F = 4 \frac{L^3}{Ed^3 b} F$$

Gleiche Berechnungen kann man für Andere Geometrische Formen durchführen.

Wenn ein Balken nun auf beiden Seiten eingespannt ist und die Kraft in der mitte wirkt, dann verteilt sich die Kraft auf beide Seiten und wird zu  $\frac{F}{2}$ . Gleiches passiert mit der Länge da diese dann nur einer Balkenhälfte entspricht ( $\frac{L}{2}$ ). Wenn dies in die Formel eingesetzt wird kann umgeformt werden und man erhält den neuen Biegungs Pfeil.

$$s = 4 \frac{L^3}{Ed^3 b} F \implies s = 4 \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{Ed^3 b} \frac{F}{2} \implies \frac{L^3}{4Ed^3 b} F$$

Durch doppelseitige Einspannung erfolgt ein um den Faktor 16 kleinerer Biegungs Pfeil als bei einseitiger Einspannung.

### 1.3.7 Deformationsarbeit

Wenn ein Körper deformiert wird, wird Arbeit geleistet. Diese Arbeit ist im elastischem Bereich vollständig reversibel und führt dazu das sich der Körper wieder in seine Ausgangslage reformieren kann. Wenn der Körper bis in den plastischen Bereich gedehnt wird, dann formt sich dieser nicht mehr in seine Ausgangslage zurück. Die aufgewendete Arbeit geht zum Teil in Wärmeenergie verloren. Die Formel für die Deformationsarbeit ist folgendermaßen definiert ( $q$  ist die Fläche eines Quaders):

$$W_{Def} = \int_0^{\Delta L} F dL = \int_0^{\varepsilon} \sigma q \cdot L d\varepsilon = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$

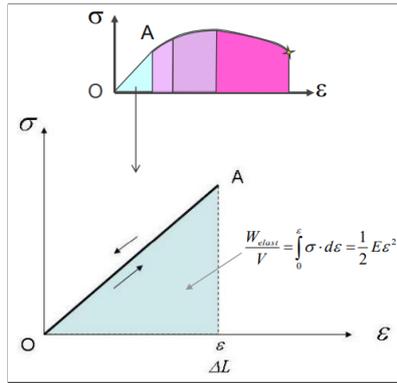


Abb. 26: Deformationsarbeit

Wenn ein Material im elastischen Bereich bis zu einem Punkt A gedehnt wird, und der Zyklus  $0 \rightarrow A \rightarrow 0$  betrachtet wird, dann ist das Kurvenintegral der Arbeit genau null. Wenn der Punkt A allerdings im plastischen Bereich liegt, dann ist das Kurvenintegral ungleich null (Wärmeenergie entsteht).

$$W_{elast} = V \oint_{0A0} \sigma \cdot d\epsilon = 0$$

$$W_{plast} = V \oint_{0AB} \sigma \cdot d\epsilon \neq 0$$

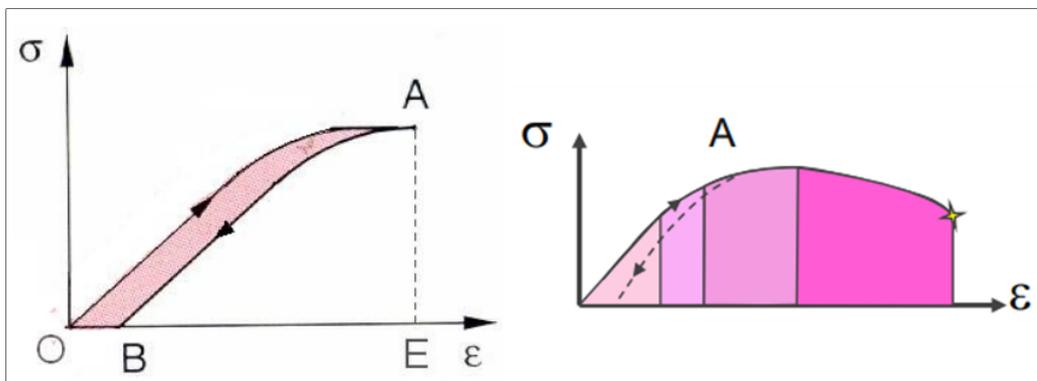


Abb. 27: Deformationsarbeit im plastischem Bereich

### 1.3.8 Elastische Hysterese

Die elastische Hysterese besteht aus zwei Zyklen. Zuerst gibt es den Dehnung-Entlastung-Zyklus bei dem ein Körper bis in den plastischen Bereich gedehnt wird. Danach wird der Körper entlastet und nimmt einen neuen Ruhezustand (B) ein. Dieser ist nicht mehr der Ausgangszustand (0) da mechanische Arbeit in die plastische Verformung (Wärmeenergie) gesteckt wurde. Der zweite Zyklus ist der Dehnung-Stauchung-Zyklus bei dem der

Körper von dem neuem Ruhezustand (B) gestaucht wird. Dadurch entsteht wiederum plastische Verformungsenergie die in Wärmeenergie freigegeben wird. Nach Wegnahme der Kraft geht der Körper erneut in einen neuen Ruhezustand (D). Nun kann dieser Zyklus Stück für Stück wiederholt werden. Es ergibt sich dadurch eine Spezielle Kurve:

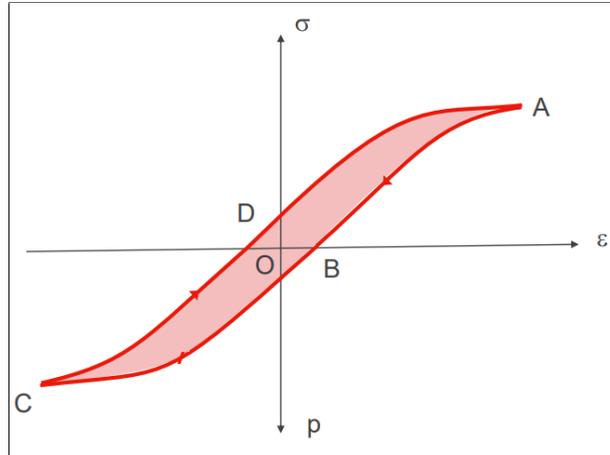


Abb. 28: Elastische Hysterese

## 1.4 Reibung zwischen festen Körpern

### 1.4.1 Haftreibung

Die Haftreibung ist eine Kraft die verhindert, das Objekte an denen eine Kraft wirkt, verschoben werden. Sie ist nicht abhängig von der Auflagefläche an dem sich das Objekt befindet. Mehr ist sie von dem Gewicht des Objektes abhängig. So kann ein Rechteck mit der langen Seite aber auch mit der kurzen Seite aufgestellt werden und die Haftreibung bleibt gleich. Die Haftreibung ist immer gleich der Kraft die das Objekt verschieben will, solange das Objekt in Ruhe verharrt.

$$\vec{F}_H = \vec{F}_Z$$

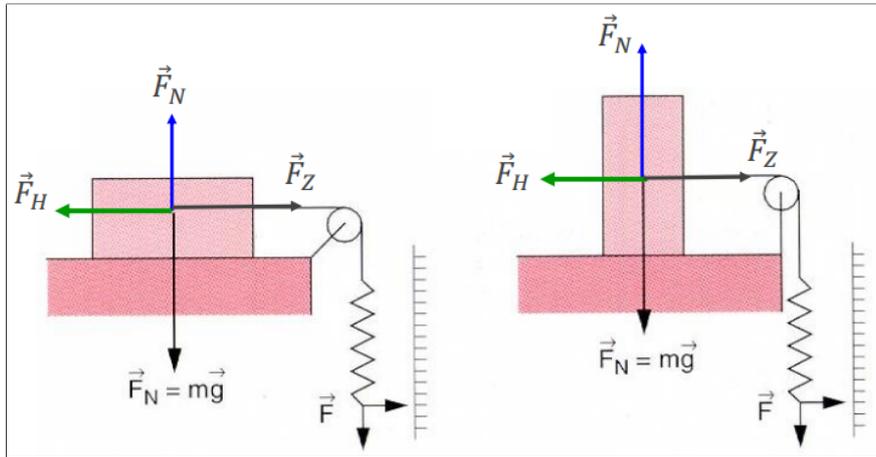


Abb. 29: Haftreibung

Die Haftreibung  $\vec{F}_H$  ist immer proportional zur Normalkraft  $\vec{F}_N$  die das Objekt auf den Boden drückt. Da  $\vec{F}_N = m\vec{g}$  ist, ist die Haftreibung von der Masse und der Gravitation abhängig. Hierfür kann man einen Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$  ausrechnen der diese Proportionalität definiert:

$$F_H = \mu_H F_N$$

Reibungskräfte haben zwei Ursachen:

- Mikroskopisch unebene Flächen die Verzahnung der Kontaktflächen herstellen. Für Bewegung ist Abrasion nötig.
- Intermolekulare Anziehungskräfte bei engem Kontakt (z.B.: Gummi) bei denen Kohäsionskräfte entstehen. Für Bewegung muss interatomare Bindung gebrochen werden.

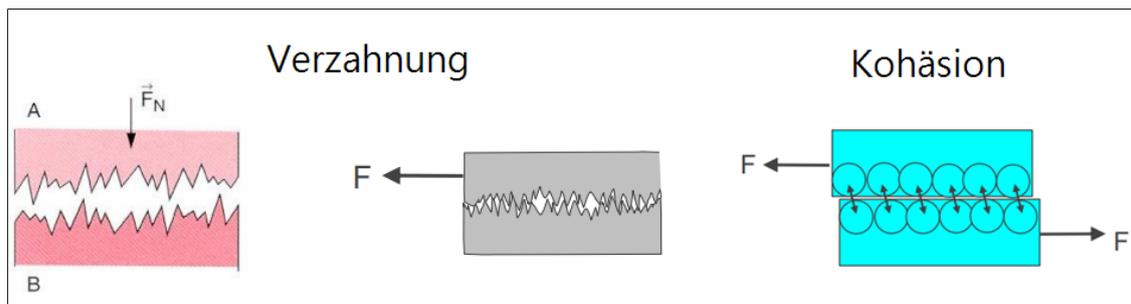


Abb. 30: Reibungskräfte

Der Haftreibungskoeffizient kann experimentell bestimmt werden, indem man den Körper auf eine Ebene unter einem Winkel  $\alpha$  legt. Der Winkel  $\alpha$  wird langsam erhöht. Kurz

bevor sich der Körper aus der Ruhelage bewegt, wird der Winkel notiert und als  $\alpha_{max}$  festgelegt. Über Winkelfunktionen kann man dann  $F_H$  und  $F_N$  ausdrücken:

$$F_H = F_G \sin \alpha_{max} = mg \sin \alpha_{max}$$

$$F_N = F_G \cos \alpha_{max} = mg \cos \alpha_{max}$$

Durch einsetzen in die Definitionsgleichung des Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$  kann dann folgende Formel ausgedrückt werden:

$$F_H = \mu_H F_N \implies \mu_H = \frac{F_H}{F_N} = \frac{mg \sin \alpha_{max}}{mg \cos \alpha_{max}} = \tan \alpha_{max}$$

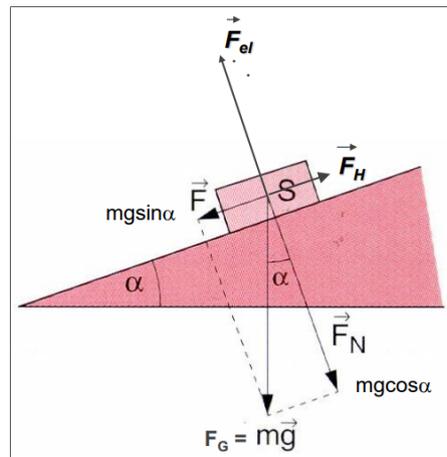


Abb. 31: Messung Haftreibung

### 1.4.2 Gleitreibung

Die Gleitreibung ist im Gegensatz zur Haftreibung abhängig vom Material und der Geschwindigkeit. Auch hier gibt es einen Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$  der immer kleiner als der Haftreibungskoeffizient ist.

$$F_G = \mu_G F_N$$

$$\mu_G < \mu_H$$

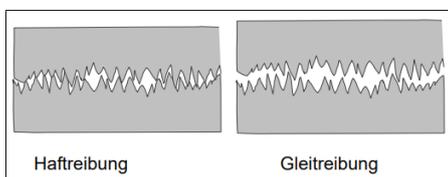


Abb. 32: Haft-Gleitreibung

Bei dem Gleiten eines Körpers über eine Oberfläche gibt es immer Vibrationen die dazu führen, dass der Körper leicht springt. Dadurch ist die Verzahnung kleiner und nur die Zähne werden abgetragen.

### 1.4.3 Rollreibung

Bei der Rollreibung gibt es Anziehungskräfte zwischen den Atomen der Berührungslinie des Rades und der Oberfläche sowie Deformation der Oberfläche. Es gibt elastische Rückstellkräfte die bei  $\vec{v} = 0$  den gleichen Betrag haben wie die Gravitationskraft des Körpers ( $F_{elast} = -F_N$ ). Sobald sich das Rad bewegt gibt es symmetrieabhängige elastische Rückstellkräfte die nun anders gerichtet sind. Der Rollreibungskoeffizient  $\mu_R$  kann durch folgende Formel berechnet werden:

$$F_R = \mu_R F_N$$

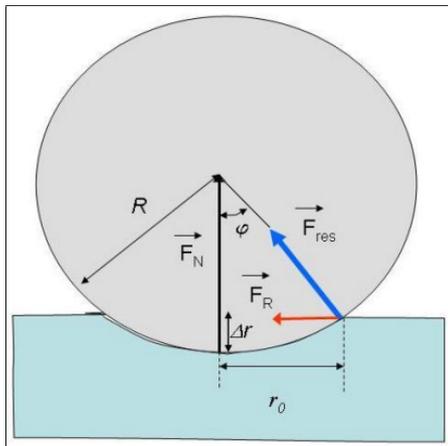


Abb. 33: Rollreibung

Die Winkelabhängige Kräfte können nun wieder berechnet werden. Dabei kann vereinfacht werden und das Verhältnis der Kräfte auch auf ein Verhältnis der Reifenauflagelänge sowie des Radius umgeändert werden. Dies wird gemacht, da das  $\Delta r$  bei einer harten Auflagefläche verschwindend klein ist und es dem Term  $\frac{r_0}{R}$  entspricht. Allgemein lässt sich sagen, dass die Rollreibungskraft kleiner wird, wenn ein großer Rad-Radius und eine große Härte des Rad und der Unterlage existiert. Dadurch ist der Rollreibungskoeffizient  $\mu_R$  auch proportional zu  $\frac{1}{R}$ .

$$\frac{F_R}{F_N} = \tan \varphi = \frac{r_0}{R - \Delta r} \approx \frac{r_0}{R} \Rightarrow F_R = \frac{r_0}{R} F_N$$

## 1.5 Ruhende Flüssigkeiten, Hydrostatik

Im Gegensatz zu Festkörpern benötigt man wesentlich weniger Kraft um Flüssigkeiten zu verformen. Dabei gibt es fast nur Reibungs- und Oberflächeneffekte. Bei der Betrachtung von idealen Flüssigkeiten benötigt man keine Kraft um die Form eines Volumens zu ändern. Im Atomaren Modell lassen sich Atome/Moleküle in Flüssigkeiten frei verschieben (in Festkörpern nicht möglich). Das Schubmodul  $G$  wäre nach der Makroskopischen Betrachtung einer idealen Flüssigkeit gleich 0.

### 1.5.1 Oberflächen von Flüssigkeiten

An der Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit treten dazu auch keine Tangentialkräfte auf. Die Oberfläche einer idealen Flüssigkeit ist dabei im rechten Winkel zur wirken-

den Gesamtkraft. Eine Flüssigkeit bewegt sich so lange, bis die Tangentialkomponente verschwindet.

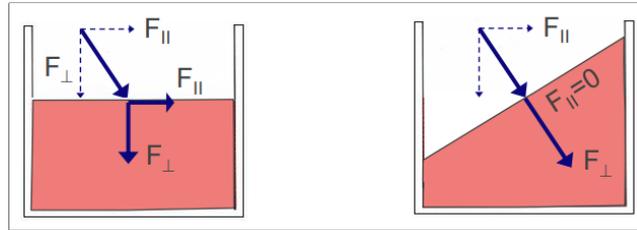


Abb. 34: Kraftwirkung Flüssigkeit

In Ruhelage hat die Flüssigkeit nur die vertikale Schwerkraft. Die Oberfläche ist in horizontaler Ebene. Falls allerdings ein rotierender Zylinder herangezogen wird, dann ändert die Flüssigkeit ihre Oberfläche durch die resultierenden Kräfte (Schwer- und Zentrifugalkraft). Die Steigung der Flüssigkeit kann aus diesen beiden Kräften hergeleitet werden. Sie ist das Verhältnis  $\frac{dz}{dr}$  in jedem definiertem Punkt der Parabel.

$$\tan \alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} \Rightarrow dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr$$

Durch Integration erhält man  $z(r)$  durch Angabe der radialen Komponente sowie der Kreisfrequenz der Rotation:

$$z(r) = \frac{\omega^2}{g} \int r dr = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

Die Integrationskonstante  $C$  lässt sich durch die Randbedingung  $z(r = 0) = z_0$  lösen. So ist  $C = z_0$ . Durch Erweiterung der Formel für die Kreisfrequenz könnte man die Rotationsgeschwindigkeit ebenfalls in die Formel integrieren (steckt implizit in der Kreisfrequenz). Somit ist die Formel für die Steighöhe:

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0$$

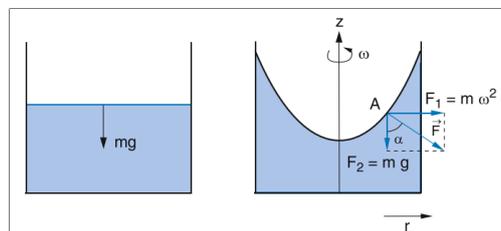


Abb. 35: Flüssigkeit - Ruhe und Rotation

### 1.5.2 Statischer Druck in einer Flüssigkeit

Der Druck auf eine Oberfläche ist definiert durch Kraft durch Fläche. Da die Kraft immer im rechten Winkel auf die Fläche steht ist nur der Betrag relevant:

$$p = \frac{F}{A}$$

$$F = |\vec{F}|$$

Wenn nun ein Kolben auf die Flüssigkeitsoberfläche gesetzt wird und dieser mit einer Kraft in Richtung Flüssigkeit gedrückt wird, dann entsteht ein Druck  $p$ . Dieser Druck ist in alle Richtungen des Gefäßes gleich groß.

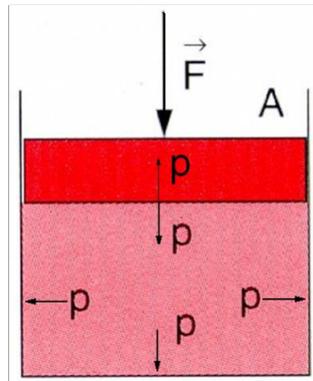


Abb. 36: Druck auf Flüssigkeit

Bei einer hydraulischen Presse ist dies die Selbe Annahme. In einer Öffnung wird ein Kolben mit einer Kraft  $F_1$  angelegt welcher auf die Flüssigkeit im Querschnitt  $A_1$  Druck ausübt. Die Flüssigkeit wird in eine weitere Kammer gepresst in der eine Querschnittsfläche  $A_2$  einen weiteren Kolben in Bewegung setzt. Wenn die Querschnittsfläche  $A_2$  größer ist als  $A_1$ , dann muss eine größere Kraft  $F_2$  auf diese wirken. Grund dafür ist, dass der Druck  $p$  konstant bleiben muss.

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

$$A_2 \gg A_1 \Rightarrow F_2 \gg F_1$$

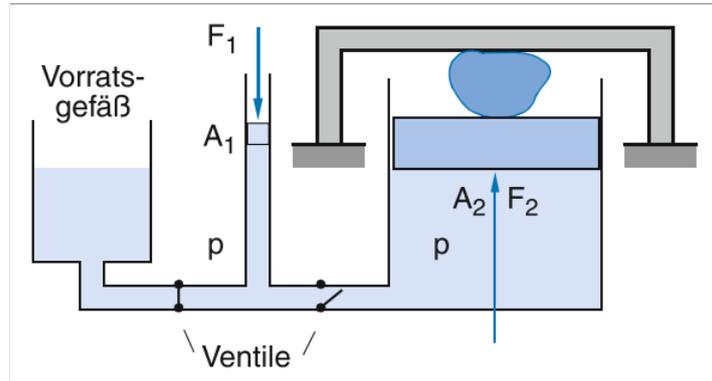


Abb. 37: Hydraulische Presse

### 1.5.3 Schweredruck

Der Schweredruck ist der Druck, den die Flüssigkeit auf sich selbst durch ihr Eigengewicht verursacht. Er wird durch die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule erzeugt. Die Gewichtskraft lässt sich über die Dichte der Flüssigkeit berechnen:

$$F_G = mg = \rho g V = \rho g (H - z) A$$

$$p(z) = \frac{F_G}{A} = \rho g (H - z)$$

Dabei ist die Dichte  $\rho$  konstant und unabhängig der Höhe  $z$  der Wassersäule. Dies ist nur zulässig unter der Annahme, dass die Kompressibilität von Flüssigkeiten sehr klein ist.

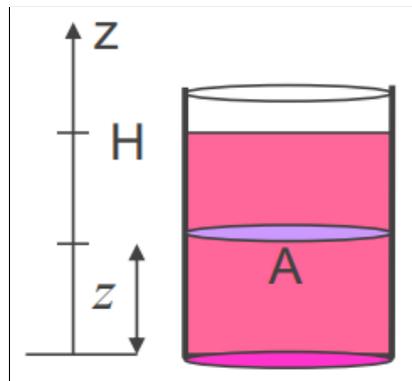


Abb. 38: Schweredruck

Unter dieser Annahme kann ein beliebiges Volumenelement in einer Flüssigkeitssäule betrachtet werden und dessen Kraft ausgerechnet werden. Dabei berechnet man sich ein Delta der Kraft welches durch die Differenz der Ober- und Unterseite ergibt. Die errechnete Kraft wirkt immer nach oben. Diese Kraft wird durch das Gewicht  $F_G = \rho g V$  des Flüssigkeitsquaders kompensiert.

$$\text{Unterseite: } p(0) = \rho g H \Rightarrow F_{\uparrow} = \rho g H A$$

$$\text{Oberseite: } p(\Delta h) = \rho g(H - \Delta h) \Rightarrow F_{\downarrow} = \rho g(H - \Delta h)A$$

$$\text{Differenzbetrag: } F_A = F_{\uparrow} - F_{\downarrow} = \rho g \Delta h A = \rho g V$$

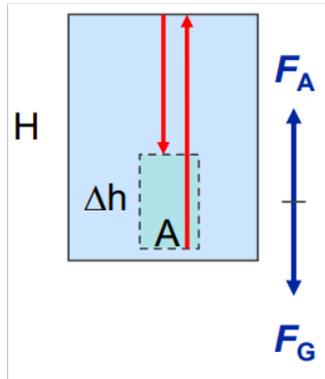


Abb. 39: Volumenelement Flüssigkeit

Die Eigenheit am Druck der Flüssigkeit ist, dass unabhängig von der Gefäßform, der Druck nur von der Höhe der Füllmenge abhängt. Dies wird auch als hydrostatische Paradoxon bezeichnet. Der Beweis dafür kann einfach berechnet werden indem man einen  $1m^2$  Würfel mit Wasser füllt. Für den Bodendruck des Würfels ergeben sich nun  $p_1 = 0.1$  bar. Wenn nun an der Oberseite des Würfels ein dünnes Steigrohr ( $q = 1cm^2, H = 10m, \Delta V = 1l$ ) angebracht wird, dann erzeugt dieses einen Druck von 1 bar. Addiert man dies, ergibt sich nun ein neuer Gesamtdruck an der Bodenseite des Würfels von  $p_2 = 1.1$  bar. Der Druck im Würfel steigt somit auf das 10fache an wobei die Masse der Flüssigkeit nur um 0,1% zugenommen hat.

#### 1.5.4 Auftrieb und Schwimmen

Wenn ein Objekt in eine Flüssigkeit getaucht wird, dann verdrängt dieses ein gewisses Volumen. Das Gewicht das dieser Körper an Wasser verdrängt, verliert dieser Körper dann auch als Eigengewicht. Dies wird auch das Archimedische Prinzip genannt. Wenn nun ein Quader in eine Flüssigkeit getaucht wird, dann entsteht ein Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Quaders. Dieser Druckunterschied bewirkt den Auftrieb.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{Fl} g h_2 - \rho_{Fl} g h_1 = \rho_{Fl} g \Delta h$$

Die Auftriebskraft ist dann die druckabhängige Kraftformel:

$$\vec{F}_A = \Delta p A \cdot \vec{e}_z = \rho_{Fl} g A \Delta h \cdot \vec{e}_z = \rho_{Fl} g V \cdot \vec{e}_z = m_{Fl} g \cdot \vec{e}_z = -\vec{G}_{Fl}$$

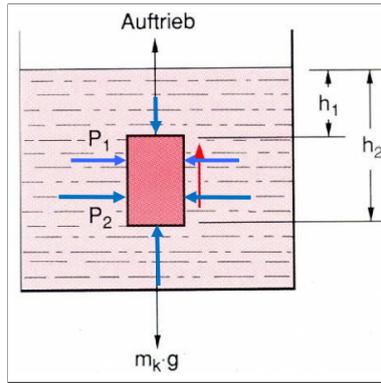


Abb. 40: Auftrieb

Es gilt daher für beliebig geformte Körper:

$$p = \rho_{Fl} g (H - z)$$

$$d\vec{F} = -\vec{\nabla} p dV = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{e}_z dV = \rho_{Fl} dgV \cdot \vec{e}_z = -\rho_{Fl} \vec{g} dV$$

Auf den ganzen eingetauchten Körper wirkt daher der Auftrieb:

$$\vec{F}_A = -\vec{g} \int \rho_{Fl} dV = -\vec{g} m = -\vec{G}_{Fl}$$

Abhängig von der Dichte eines Körpers kann abgelesen werden ob dieser auf einer Flüssigkeit schwimmt:

$$\text{Schwimmen: } \rho_K < \rho_{Fl} \Rightarrow F_A > G_K$$

Der Körper schwimmt und taucht nur soweit ein bis  $\vec{G}_K = -\vec{F}_A$  ist.

- Schwimmen:  $F_A > F_G$  - nur Teil des Körpers taucht ein.
- Schweben:  $F_A = F_G$  - indifferentes Gleichgewicht.
- Sedimentation:  $F_A < F_G$  - Körper sinkt ab.

Veranschaulichend kann man dies anhand von einem Beispiel betrachten: Es wird berechnet, wie viel Prozent eines Eisberges sich unter der Wasseroberfläche befinden. Hierfür sind folgende Werte gegeben:

$$\text{Eis: } \rho_{Eis} = 0.95 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}, \text{ Salzwasser } 0^\circ: \rho_W = 1.05 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Wir wissen das  $F_G = F_A$  ist. Da ein Teil des Eisberges im Wasser und in der Luft ist können wir  $F_G$  folgendermaßen bestimmen:

$$F_G = F_A^W + F_A^L$$

$$g \int_{V_{Eis}} \rho_{Eis} dV = g \int_{V_{Eis}^W} \rho_W dV + g \int_{V_{Eis}^L} \rho_L dV$$

$$\rho_{Eis} V_{Eis} = \rho_W V_{Eis}^W + \rho_L V_{Eis}^L$$

Da  $\rho_L \ll \rho_W$  ist, kann man sagen das der Summand  $\rho_L V_{Eis}^L$  gegen null geht und somit verschwindend klein ist:

$$\rho_{Eis} = \rho_W \frac{V_{Eis}^W}{V_{Eis}}$$

$$\frac{V_{Eis}^W}{V_{Eis}} = \frac{\rho_{Eis}}{\rho_W} = \frac{0.95}{1.05} \approx 0.905$$

Durch einsetzen der Dichte von Wasser und Eis erhalten wir ein Verhältnis. Dies entspricht 90,5% des Volumens des schwimmenden Eisberges das sich unter der Wasseroberfläche befinden.

Hilfe zur Umwandlung von Einheiten: Die Dichte ist immer in  $\frac{g}{cm^3}$  angegeben. Um dies umzuwandeln können die Potenzen vorgezogen werden. Beispiel: Die Dichte von Wasser ist  $0.998 \frac{g}{cm^3}$ .

$$\text{gramm} \cdot 10^{-3} = \text{kg}$$

$$\text{cm} \cdot 10^{-2} = \text{m}$$

Da cm die dritte Potenz hat, multiplizieren wir 3 mit der zweiten Potenz und haben somit  $10^{-6}$ . Der Vorfaktor von cm wird über den Bruch gezogen, folglich ändert sich die Potenz im Vorzeichen und wird zu  $10^6$ . Nun können die Vorfaktoren vorgezogen werden:

$$0.998 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \frac{kg}{m^3} = 0.998 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Das Archimedische Prinzip kann außerdem verwendet werden, um nachzuweisen ob Materialien echt oder Fälschungen sind. Der Versuchsaufbau besteht hierbei mit einer Waage an der zwei Objekte befestigt sind. Eines ist ein verifiziertes Stück Gold und ein anderes ist der Testgegenstand. In der Luft wiegen beide Objekte gleich viel, die Waage ist horizontal ausgerichtet. Wenn nun die Waage samt Messgewichten in das Wasser getaucht wird, erfahren die Gegenstände einen Auftrieb der Ihrem Volumen entspricht. Diese Auftriebskraft sollte gleichermaßen von der Gewichtskraft des Körpers kompensiert werden. Dies passiert wieder nach der Formel:

$$\vec{F}_A = -\vec{g}\rho_{Fl}V$$

$$\vec{F}_G = -\vec{g}\rho_KV$$

Wenn nun aber die Dichte des Testgegenstandes nicht gleich der von Gold ist, dann müssten die Objekte nicht mehr horizontal auf der Waage ausgerichtet sein.

### 1.5.5 Oberflächenspannung

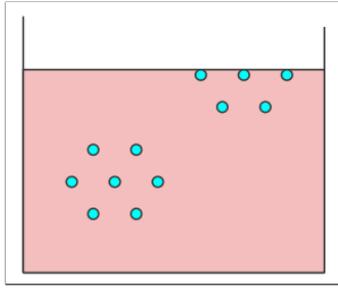


Abb. 41: Oberflächenmolekül

Ein Oberflächenmolekül hat weniger benachbarte Moleküle als eines in einer Flüssigkeit. Dadurch ist die Flüssigkeitsoberfläche um  $\Delta A$  vergrößert und die Energie des Systems steigt um  $\Delta W$ . Das Verhältnis der beiden stellt die spezifische Oberflächenenergie  $\varepsilon$  dar:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A} \rightarrow [\varepsilon] = \frac{J}{m^2}$$

Ein Molekül an der Oberfläche hat dadurch höhere potentielle Energie als ein Molekül im inneren. Das Oberflächenmolekül hat eine Kraft die ins innere der Flüssigkeit gerichtet ist. Bei größer werdender Steigtiefe nimmt diese potentielle Energie ab:

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot}$$

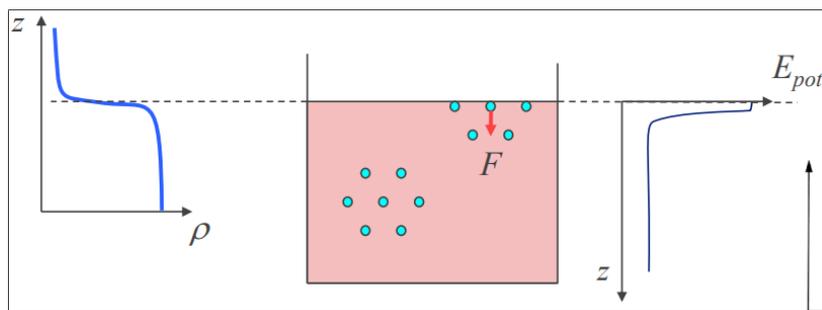


Abb. 42: Oberflächenmolekül Energie

Falls die Oberflächenenergie  $\varepsilon$  positiv ist, versucht jede Flüssigkeit bei vorgegebenem Volumen eine Form mit minimaler Oberfläche einzunehmen. Die Oberfläche ist gespannt und wirkt dadurch wie eine angespannte Folie (Oberflächenspannung tangential an die Oberfläche).

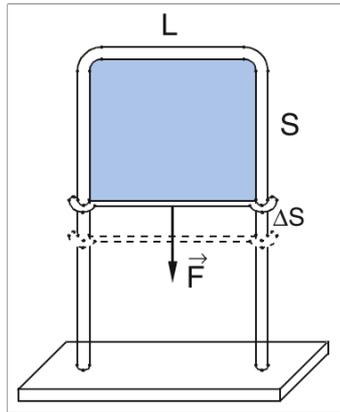


Abb. 43: Oberflächenspannung

Bei Betrachtung eines Querbügels der eine verstellbare Seite hat, wird eine Oberfläche gespannt die auf der Vor- und Rückseite entsteht. Um den Querbügel zu verschieben, muss eine Kraft  $\vec{F}$  angelegt werden. Es entsteht eine Zugspannung die tangential zur Oberfläche wirkt:

$$\sigma = \frac{F}{2L} \rightarrow [\sigma] = \frac{N}{m}$$

Die Oberflächenvergrößerung kann durch die Fläche  $\Delta A = 2\Delta S \cdot L$  beschrieben werden.

Die Arbeit kann nun über Kraft mal Weg hergeleitet werden. Außerdem ist die Arbeit ja durch die Oberflächenenergie definiert:

$$\Delta W = \varepsilon \cdot \Delta A$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta S = \sigma \cdot 2L\Delta S = \sigma \cdot \Delta A$$

Somit ergibt sich, dass die Oberflächenenergie gleich der Zugspannung ist:

$$\sigma = \varepsilon$$

Die mechanische Analogie, dass eine Oberfläche einer Flüssigkeit gleich ist wie eine angespannte elastische Folie. Bei beiden braucht man eine Kraft um deren Oberfläche zu vergrößern.

### 1.5.6 Grenzflächen und Haftspannung

Flüssigkeiten in einem Gefäß erzeugen einen Randwinkel. Dieser Randwinkel ist abhängig von den Oberflächenspannungen die tangential zur Grenzfläche entsteht. Durch die Oberflächenspannung können die Kräfte auf  $dl$  berechnet werden die im Punkt A (liegt zwischen Flüssigkeit, Gas und Festkörper) liegen. Da wir hier 3 Grenzflächen haben, muss es auch 3 Oberflächenspannungen  $\sigma$  der unterschiedlichen Phasen geben.

$$|\vec{F}| = \sigma dl$$

Auf die Flüssigkeit wirkt die Schwerkraft was dazu führt, das die Oberfläche horizontal wäre. Da aber an den Grenzflächen durch die Oberflächenspannung zusätzliche Kräfte existieren, sind die Ränder der Flüssigkeitsoberfläche die an der Wand koordiniert sind nicht mehr horizontal. Sie erzeugen einen Randwinkel der abhängig (konkave/konvexe) von der Oberflächenspannung ist. Die Berührungslinie Flüssigkeit-Wand durch den Punkt

A und damit der Randwinkel  $\varphi$  stellen sich so ein, dass die Summe aller Kräfte in A Null wird

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Der Randwinkel kann aus der folgenden Bedingung bestimmt werden:

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}}{\sigma_{2,3}}$$

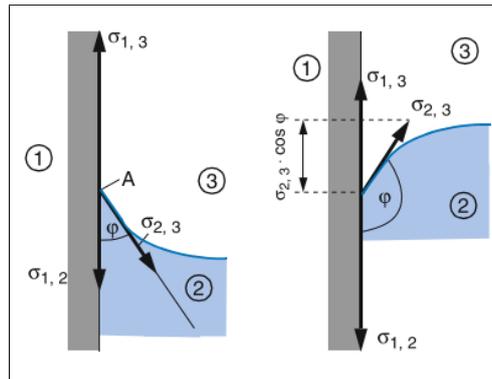


Abb. 44: Oberflächenspannung mit Grenzfläche

Wenn  $|\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}| \leq \sigma_{2,3}$  ist, dann hat der Randwinkel  $\varphi$  einen definierten Wert der sich in zwei Fällen eingliedern lässt:

**Fall 1:** Oberflächenspannung  $\sigma_{1,3} > \sigma_{1,2} \rightarrow \cos \varphi > 0 \rightarrow \varphi < 90$ . Die Flüssigkeit bildet eine konkave gekrümmte Oberfläche die mit der Wand einen spitzen Randwinkel  $\varphi$  bildet. Beispiel: Wasser - Glas - Luft.

**Fall 2:** Oberflächenspannung  $\sigma_{1,3} < \sigma_{1,2} \rightarrow \cos \varphi < 0 \rightarrow \varphi > 90$ . Die Flüssigkeit bildet eine konvexe gekrümmte Oberfläche die mit der Wand einen stumpfen Randwinkel  $\varphi$  bildet. Beispiel: Quecksilber - Glas - Luft.

Falls  $|\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}| > \sigma_{2,3}$  ist, so kann kein Winkel  $\varphi$  erfüllt werden.

### 1.5.7 Kapillarität

Der Kapillar Effekt entsteht bei engen Röhren die von einer Flüssigkeit benetzt sind. Dabei ist es für die Flüssigkeit im Rohr günstiger, den Kontakt mit der benetzten Flüssigkeit als mit der Luft einzugehen. Der daraus resultierende Effekt ist, dass die Flüssigkeit innerhalb der Röhre höher steigt als der eigentliche Füllstand des Behältnisses. Dabei leistet die Flüssigkeit Arbeit gegen die Schwerkraft.

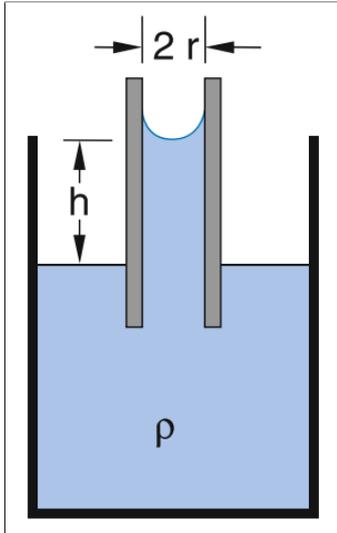


Abb. 45: Kapillar Effekt

Die Kapillarität und somit die Steighöhe einer Flüssigkeit kann über den Energieaufwand berechnet werden:

$$W_A = mgh$$

Dies setzt man gleich für die  $W_A$  Definition über die Fläche und der Oberflächenspannung (falls  $\sigma_{1,3} > \sigma_{1,2}$ ):

$$W_A = mgh = A\Delta\sigma$$

$$mgh = A \cdot (\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2})$$

Wir wissen bereits aus der vorherigen Formel das  $(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}) = \sigma_{2,3} \cos \varphi$  ist, also setzen wir ein:

$$\rho V gh = A \sigma_{2,3} \cos \varphi$$

Das Volumen und die Rohr-/Zylinderfläche kann noch ausgedrückt werden:

$$\rho \pi r^2 gh^2 = 2\pi r h \sigma_{2,3} \cos \varphi$$

Durch umformen auf h wird die Steighöhe berechnet:

$$h = \frac{2\sigma \cos \varphi}{\rho g r}$$

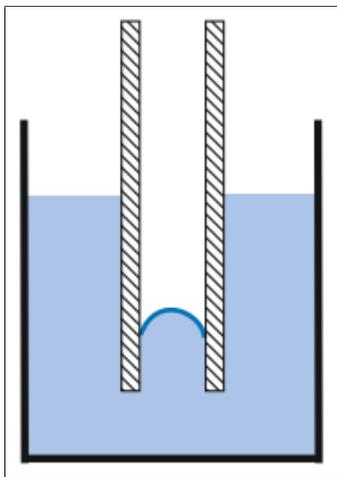


Abb. 46: Kapillardepression

Bei der Kapillardepression ist die enge Röhre nicht mit einer Flüssigkeit benetzt. Dies wirkt sich dann auf die Oberflächenspannung so aus, dass  $\sigma_{1,3} < \sigma_{1,2}$  ist und die Oberfläche konvex gekrümmt ist. Die Formel zur Berechnung der Sinktiefe der Kapillardepression ist die selbe wie die der Steighöhe des Kapillar Effektes. Der Unterschied hierbei liegt allerdings im Winkel  $\varphi$  der hierbei durch den cos einen negative Wert erhält.

## 2 Gase

Gase lassen sich beliebig expandieren und bis zu einer gewissen Grenze auch komprimieren. Grund dafür ist die geringe Dichte. Im Vergleich zu Festkörpern oder Flüssigkeiten ist die Dichte von Gasen um  $10^{-3}$  geringer. Der Molekülabstand ist dabei um etwa 10 mal größer. Somit ist die  $E_{kin} \gg E_{pot}$ .

### 2.1 Makroskopische Betrachtung

In der makroskopischen Form werden Gase über die Thermische Zustandsgleichung definiert:

$$pV = nRT$$

- **p** - Druck
- **V** - Volumen
- **n** - Molzahl
- **R** - universelle Gaskonstante
- **T** - Temperatur

Dabei ist R die die universelle Gaskonstante die einen definierten Wert von  $8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$  hat. In mikroskopischer Form ist folgende Gleichung zu verwenden:

$$pV = Nk_B T$$

Hierbei wird nicht die Molzahl  $n$  und die universelle Gaskonstante  $R$ , sondern die Molekülzahl  $N$  und die Boltzmann Konstante  $k_B$  verwendet.  $k_B$  ist ebenfalls definiert mit  $1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ .

Wenn  $n = const$  ist, dann ist die Molzahl gleichbleibend und das Behältnis geschlossen. Folglich gibt es 3 Zustandsvariablen  $p, V, T$ . Damit können Zusammenhänge beschrieben werden, bei denen 2 Zustandsvariablen variieren und die dritte konstant gehalten wird.

## 2.2 Boyle-Mariotte Gesetz

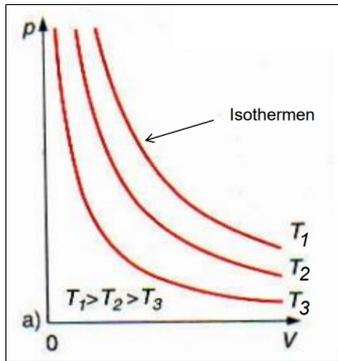


Abb. 47: Isotherme

Mit dem Gesetz von Boyle-Mariotte können ideale Gase unter isothermen Bedingungen  $T = \text{const}$  in einem geschlossenen Behälter analysiert werden.

$$pV = nRT$$

$$n = \text{const}, T = \text{const}$$

Daraus folgt das  $pV = \text{const}$  sein muss, sowie das  $p$  proportional zu  $\frac{1}{V}$  sein muss. Man nennt diesen Verlauf (der einer Hyperbel ähnelt) Isotherme.

## 2.3 Kompressibilität von Gasen

Ähnlich wie bei Festkörpern kann man für Gase die Kompressibilität mit der allgemeinen Formel bestimmen.

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Durch die Bedingung:

$$pV = \text{const} \Rightarrow V = \frac{\text{const}}{p}$$

kann dann die Gleichung gelöst werden:

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{\text{const}}{p^2} = -\frac{pV}{p^2} = -\frac{V}{p}$$

Eingesetzt in die Formel für die Kompressibilität ergibt dies:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \left( -\frac{V}{p} \right) \Rightarrow \kappa = \frac{1}{p}$$

Gas lässt sich also um so leichter komprimieren, je kleiner sein Druck ist.

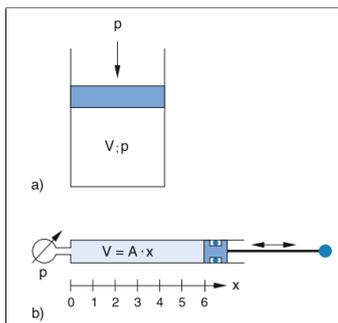


Abb. 48: Kompressibilität Gas

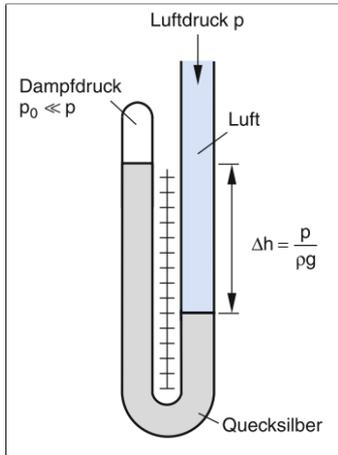


Abb. 49: Torricelli'sche Röhre

Genau wie bei einer Flüssigkeit der Schweredruck kann auch bei einem Gas der Gasdruck bemessen werden. Dies ist der Druck, den die Atmosphäre auf ein Objekt ausübt. Bei der Torricelli'schen Röhre übt das Gas druck auf das Quecksilber aus. Abhängig von diesem Druck wird das Quecksilber nach unten gedrückt und die  $\Delta h$  verändert sich.

$$\Delta h = \frac{p}{\rho g}$$

$$p = \rho_{Hg} g \Delta h$$

Der Druck ist über die Änderung der Höhe bestimmbar da dieser proportional zu  $\Delta h$  ist.

## 2.4 Gesetz von Gay-Lussac

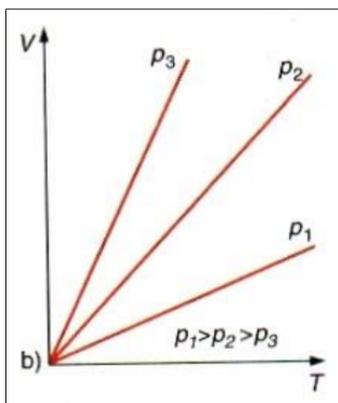


Abb. 50: 1. Gay-Lussac

Bei dem erstem Gesetz von Gay-Lussac setzt man den Druck konstant. Dies entspricht isobaren Bedingungen:

$$pv = nRT$$

$$p = \text{const}, n = \text{const}$$

Daraus folgt, dass  $V$  direkt proportional zu  $T$  ist:

$$V = \frac{nR}{p} \cdot T = \text{const} \cdot T$$

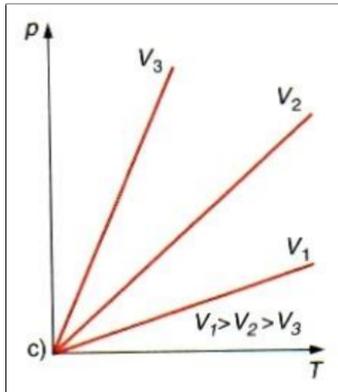


Abb. 51: 2. Gay-Lussac

Bei dem zweiten Gesetz von Gay-Lussac setzt man das Volumen konstant. Dies entspricht isochoren Bedingungen:

$$pv = nRT$$

$$V = \text{const}, n = \text{const}$$

Daraus folgt, dass  $p$  direkt proportional zu  $T$  ist:

$$p = \frac{nR}{V} \cdot T = \text{const} \cdot T$$

## 2.5 Proportionalität

Wenn die Temperatur sowie die Molare Masse eines Gas konstant bleibt, dann ist die Dichte proportional zum Druck:

$$p = \rho \frac{RT}{M_{\text{mol}}}, \text{ bei } T = \text{const} \Rightarrow \rho \propto p$$

Auch dieser Zusammenhang lässt sich über die thermische Zustandsgleichung nachvollziehen. nachfolgend sind alle Proportionalitäten bei spezifischen konstanten Parametern aufgelistet:

$$pV = nRT$$

$$n = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$p \propto \frac{1}{V}$$

$$p = \text{const}$$

$$V \propto T$$

$$V = \text{const}$$

$$p \propto T$$

## 2.6 Barometrische Höhenformel

Wir betrachten eine Luftsäule die über der Erdoberfläche schwebt. Diese Luftsäule hat eine Grundfläche  $A$  und steht auf einer Höhe  $h$ . Dabei hat diese Luftsäule selbst eine gewisse Dicke  $dh$ . Über das 2. Newtonsche Axiom kann dann die Gewichtskraft, abhängig von der Dicke  $dh$  berechnet werden:

$$dF_G = -d(mg) = -gdm = -g\rho dV = -g\rho A dh$$

Der Druck dieser Luftsäule kann dann über die Kraft berechnet werden:

$$dp = \frac{dF_G}{A} = -g\rho dh$$

Da nun aber die Kompressibilität von Gas viel höher ist als von Flüssigkeiten wird die Dichte des Gas abhängig von dem Druck größer:

$$\text{Flüssigkeit: } \kappa_{\text{gering}} \Rightarrow \rho(p) = \text{const}$$

Gas:  $\kappa gro \Rightarrow \rho(p) \neq const$

Somit muss die druckabhängige Erhöhung der Dichte des Gases noch berücksichtigt werden. Wir stellen unter der Annahme, dass  $T = const$  ist unsere Formel auf:

$$p = const \cdot \rho \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = const \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

$p_0$  und  $\rho_0$  entsprechen den Werten bei  $h = 0$ .  $p$  und  $\rho$  sind die Werte bei beliebiger Höhe  $h$ . Wir können nun die Gleichung für  $\rho$  in die Gleichung für den Druck bei beliebiger Höhe einsetzen:

$$dp = -\rho g dh = -\frac{\rho_0}{p_0} p \cdot g dh$$

Dies ist eine Differentialgleichung die wir lösen können:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

Durch Integration der beiden Seiten erhalten wir:

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g h + C$$

Mit unseren Anfangswerten für  $h = 0$  können wir nun unser  $C$  berechnen:

$$\ln p(h = 0) = -\frac{\rho_0}{p_0} g \cdot 0 + C = C$$

$$\ln p = C = \ln p_0$$

$$\ln p = \ln p_0 - \frac{\rho_0}{p_0} g h$$

Dies kann noch einmal mittels exp umgeformt werden um  $p$  vom ln zu lösen:

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

Diese Formel ist die barometrische Höhenformel zur Beschreibung des Luftdruckes bei einer isothermen Atmosphäre ( $T = const$ ). Dabei ist zu sehen das der Luftdruck exponentiell mit  $h$  abnimmt. Durch die Proportionalität  $\rho \propto p$  ist die Gleichung analog zu verwenden für die Dichte abhängig von der Höhe:

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

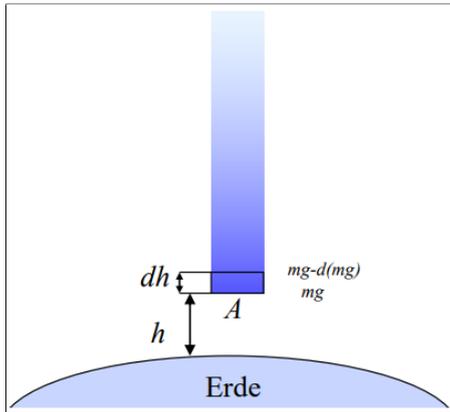


Abb. 52: Höhenformel Atmosphäre

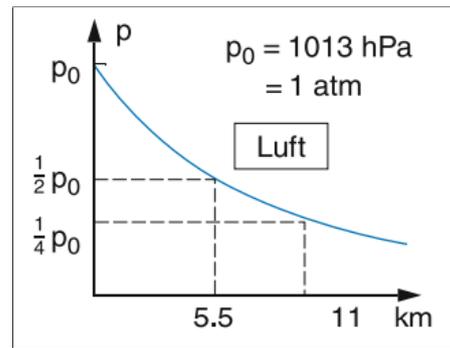


Abb. 53: Höhenformel Diagramm

Die barometrische Höhenformel kann zusätzlich noch in mikroskopischer Form interpretiert werden. Als allgemeine Gleichung haben wir:

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

In dem Teil  $\frac{\rho_0}{p_0}$  steckt implizit die Masse, der Druck und das Volumen. Man kann daher umschreiben auf:

$$\frac{\rho}{p} = \frac{M}{pV} \Rightarrow \text{in SI-Einheiten: } \frac{s^2}{m^6}$$

$M$  stellt hier die Masse des Gases in einem Behälter da. Dies kann in die mikroskopische Form umgeschrieben werden:

$$\frac{M}{pV} = \frac{mN}{Nk_bT} = \frac{m}{k_bT}$$

$m$  ist hierbei nun die Masse eines einzelnen Moleküls und  $N$  ist die gesamte Teilchenmenge in einem Behälter. Dies kann nun wieder in die barometrische Höhenformel eingesetzt werden:

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{k_bT}\right)$$

Folgend noch einige weitere mikroskopische Zusammenhänge:

$$\text{Molzahl } : n = \frac{N}{N_A}$$

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = N \frac{R}{N_A}T = Nk_bT$$

$$R = N_A k_b$$

- $n$ : Molzahl
- $N$ : Teilchenzahl in einem Behälter
- $N_A$ : Avogadrozahl - Teilchenzahl in einem Mol:  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$

## 2.7 Kinetische Gastheorie

### 2.7.1 Modell des idealen Gases

Das ideale Gas besteht aus Atomen oder Molekülen die sich wie kleine starre Kugeln verhalten. Eine Wechselwirkung tritt nur bei Stößen dieser "Kugeln" auf.

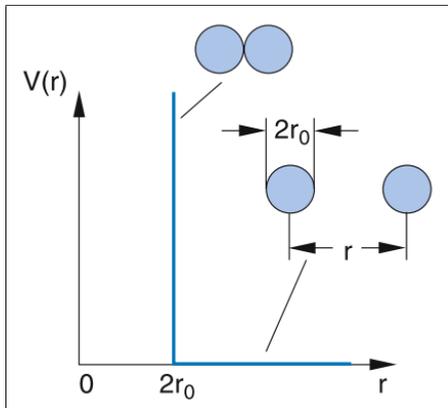


Abb. 54: Wechselwirkungspotential

Falls der Abstand  $r > r_0$  ist, so beeinflussen sich die Atome in keinsten Weise (es kommt zu keinen Stößen). Bei den Stößen die diese Atome durchführen gelten die Energie- und Impulserhaltung.  $r$  ist dabei der interatomare Abstand. Das Wechselwirkungspotential für das Modell mit starren Kugeln ist deshalb:

$$V(r) \equiv 0 \text{ für } r > 2 \cdot r_0$$

$$V(r) = \infty \text{ für } r < 2 \cdot r_0$$

Ein Beispiel für ein ideales Gas wäre folgendermaßen vorzustellen:

$$p = 1 \text{ bar}, T = 273 \text{ K}, V = 1000 \text{ L}$$

Ein Mol enthält  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$  Moleküle. Über die mikroskopische thermische Zustandsgleichung kann nun berechnet werden, wie viele Teilchen sich in einem bestimmten Volumen aufhalten:

$$pV = Nk_bT$$

Umgeformt auf Teilchenmenge  $N$  ergibt dies (Umwandlung auf SI-Einheiten - Bar auf Pascal und Liter in  $m^3$ ):

$$N = \frac{pV}{k_bT} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 1000 \cdot 10^{-3}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 2.656 \cdot 10^{25} \text{ Teilchen in einem } m^3$$

Wenn nun das Volumen durch die erhaltene Teilchenanzahl  $N$  gerechnet wird, so kommt man auf den mittleren Abstand in  $m^3$ :

$$\frac{V}{N} = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{2.656 \cdot 10^{25}} = 3.84 \cdot 10^{-26} m^3 = 38.46 nm^3$$

Dieses Ergebnis ist wurde von  $m^3$  auf  $nm^3$  umgewandelt ( $1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ nm}^3 = 1 \cdot 10^{-27} \text{ m}^3$ ). Dieser Wert ist nun der mittlere Abstand in Kubik. Um den mittleren Abstand in einer Dimension zu erhalten muss die dritte Wurzel gezogen werden:

$$\langle r \rangle = \sqrt[3]{38.46 \text{ nm}^3} = 3.375 \text{ nm}$$

Wenn nun geprüft wird, ob sich das Gas wie ein ideales Gas verhält, kann der Atomradius  $r_0$  (bei Helium 0.05 nm) durch den gemittelten mittleren Abstand berechnet werden:

$$\frac{r_0}{\langle r \rangle} = \frac{0.05 \text{ nm}}{3.375 \text{ nm}} = 0.0148 \ll 1$$

Als Ergebnis erhalten wir einen Faktor, der viel kleiner als 1 ist. Wenn 1 oder mehr aus dieser Gleichung hervorgeht, dann würde es unendlich viele Stöße geben, da sich Atomvolumen immer überlagern würden. Falls jedoch die Zahl viel geringer als 1 ist, dann treten im Verhältnis wenige Stöße statt (da weniger Atome in der unmittelbaren Umgebung sind).

### 2.7.2 Grundgleichung der kinetischen Gastheorie

Der Druck den ein Gas auf eine Wand ausübt, wird über den Impulsübertrag der Moleküle bei den elastischen Stößen mit der Wand bewirkt.

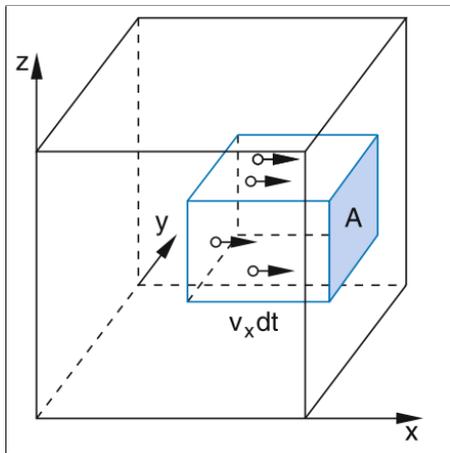


Abb. 55: Impulsübertrag Herleitung

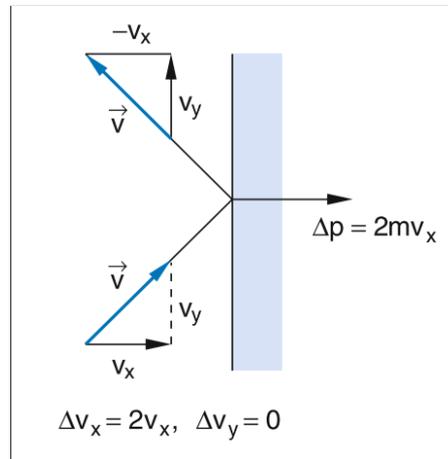


Abb. 56: Impulsübertrag

Um den Impulsübertrag auf die Wand herzuleiten, werden zwei grundlegende Ansätze benötigt (Impuls wird hier mit blau belegt um Verwirrung zwischen Druck zu vermeiden):

$$\text{Druck: } p = \frac{F}{A} \qquad \text{Kraft: } \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Die Moleküle stoßen unter unterschiedlichen Winkeln gegen die Wand. Relevant ist aber nur die rechtwinklige Komponente in x-Richtung. Über den Impulserhaltungssatz kann der Impuls vor und nach dem Stoß herangezogen werden und eine Differenz daraus gebildet werden:

$$\Delta p = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

Über den Impuls kann nun die Kraft berechnet werden, den die Moleküle an die Wand bewirken.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{Z \cdot 2mv_x}{dt}$$

$Z$  stellt die Anzahl der Moleküle dar, die in einer gewissen Zeit  $dt$  gegen die Wandfläche  $A$  fliegen.

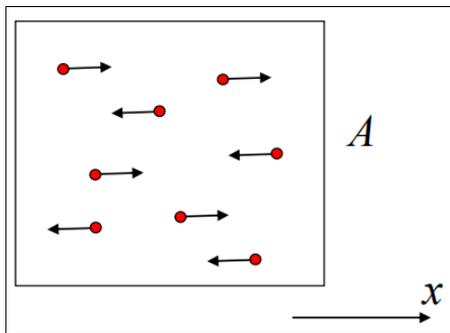


Abb. 57: Molekülbewegung

$Z$  kann über das Gasvolumen  $V$  in der sich  $N$  Moleküle befinden berechnet werden. Dabei bewegen sich die Hälfte der Moleküle in positive und die andere Hälfte in negative  $x$ -Richtung. Da hier die Moleküldichte benötigt wird, kann diese über die Umformung  $n = \frac{N}{V}$  berechnet werden.

$$n_x = n_{-x} = \frac{1}{2}n$$

Nun muss noch das Volumen  $V^*$  definiert werden, in dem Moleküle mit einer gewissen Geschwindigkeit  $v_x$  und innerhalb einer gewissen Zeit  $dt$  auf die Wandfläche  $A$  stoßen.

$$Z = n_x V^* = n_x A dx = n_x A v_x dt$$

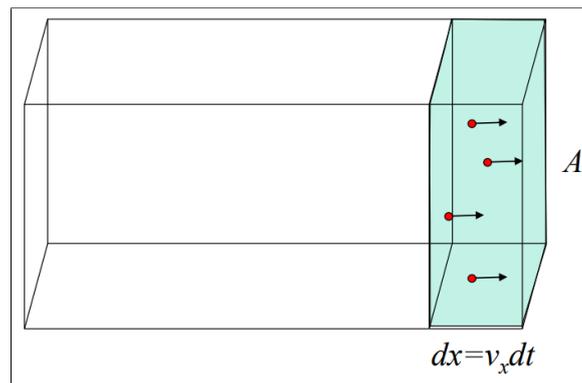


Abb. 58: Volumen  $V^*$

Da nun alle Variablen hergeleitet sind, kann in die Kraft-Formel eingesetzt werden:

$$F = \frac{Z \cdot 2mv_x}{dt} = \frac{n_x A v_x dt \cdot 2mv_x}{dt} = 2mn_x v_x^2 A = mnv_x^2 A$$

Abschließend ist noch zu beachten, dass nicht alle Moleküle mit der selben Geschwindigkeit  $v_x$  fliegen, daher wird ein Mittelwert  $\overline{v_x^2}$  gebildet. Der Druck auf die Wand lässt sich nun einfach über den Druck  $p = \frac{F}{A}$  errechnen:

$$p = mn\overline{v_x^2}$$

Diese Formel ist im Gleichgewichtszustand auch für alle anderen Richtungen (x,y,z) gleich wahrscheinlich (isotrop). Da die Impulsübertragung in jede Richtung gleich groß sein muss, gilt:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Daher kann die Geschwindigkeit auch von dem Betrag der Geschwindigkeit errechnet werden:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

$$p = \frac{1}{3}mn\overline{v^2}$$

Die Mittlere Kinetische Energie eines Moleküls kann hierfür zusätzlich verwendet werden:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} \Rightarrow m\overline{v^2} = 2 \cdot \overline{E_{kin}}$$

$$p = \frac{1}{3}mn\overline{v^2} = \frac{2}{3}n \cdot \overline{E_{kin}}$$

Wenn nun die Moleküldichte  $n = \frac{N}{V}$  wiederum eingesetzt wird, so kommt man auf die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie:

$$p = \frac{2}{3}n \cdot \overline{E_{kin}} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \cdot \overline{E_{kin}} \Rightarrow pV = \frac{2}{3}N \cdot \overline{E_{kin}}$$

Experimente haben ergeben, dass  $p \cdot V$  bei konstanter Molekülnzahl  $N$  nur von der Temperatur abhängt. Dementsprechend hängt auch  $E_{kin}$  von der Temperatur ab. Hierfür wurde eine neue Temperaturskala eingeführt bei der  $T$  proportional zu  $E_{kin}$  ist.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_bT$$

Diese eingesetzt in die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie ergibt die allgemeine Gasgleichung (des idealen Gases):

$$pV = \frac{2}{3}N \cdot \frac{3}{2}k_bT \Rightarrow pV = Nk_bT$$

### 2.7.3 Gleichverteilungssatz/Äquipartitionstheorem

Da sich jedes Molekül im dreidimensionalen Raum in drei Raumrichtungen x,y,z bewegen kann, gibt es 3 Freiheitsgrade der Translationsbewegung. Die Gleichung  $E_{kin} = \frac{1}{2}k_bT$  bezieht sich daher auf einen Freiheitsgrad. Zusätzlich zu den drei Freiheitsgraden der Translation können Moleküle auch noch Freiheitsgrade durch Rotation und Schwingung erhalten. Freiheitsgrade werden mit  $f$  geschrieben:

$$E_{kin} = f \cdot \frac{1}{2}k_bT$$

### 2.7.4 Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell und Boltzmann ist eine statistische Berechnung von wahrscheinlichen Geschwindigkeiten. Dabei entsteht eine Art Glockenkurve. Bei der Geschwindigkeitsverteilung unterscheidet man zwischen 3 verschiedenen Größen:

- Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  (oder  $v_y, v_z$ )
- Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$
- Geschwindigkeitsbetrag (Skalar)  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Dementsprechend werden auch drei unterschiedliche Verteilfunktionen verwendet:

Herleitung der **Geschwindigkeitskomponente**:  $f(v_x)dv_x$  ist die Wahrscheinlichkeit ein Molekül zu finden, das eine Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  aus dem Intervall  $[v_x$  bis  $v_x + dv_x]$  hat. Für die Geschwindigkeitskomponente hängt die Funktion  $f$  nur vom Betrag von  $v_x$  ab:

$$f = f(|v_x|) \iff f = f(v_x^2) \iff f = f(\varepsilon_x)$$

Dabei stellt  $\varepsilon_x$  die kinetische Energie  $\frac{1}{2}mv_x^2$  da. Die Verteilfunktion hat die Eigenschaft  $f(\varepsilon) = A \exp(-\alpha\varepsilon)$  wobei  $\varepsilon$  einer Komponente x,y,z entspricht. Wenn nun  $\varepsilon$  in die Gleichung eingesetzt wird, so erhalten wir:

$$f(v_x) = A_1 \exp\left(-\frac{\alpha m v_x^2}{2}\right)$$

Hier stellt  $A_1$  und  $\alpha$  die entsprechende Konstante dar. Außerdem ist  $A_1 = A_2 = A_3$  welche durch die Verteilfunktion abhängig von  $v_y$ , und  $v_z$  entstehen. Der nächste Schritt ist die Konstanten zu bestimmen.  $A_1$  kann aus der Normierungsbedingung mithilfe eines Poisson-Integral hergeleitet werden:

$$\text{Normierungsbedingung: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = A_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha m v_x^2}{2}\right) dv_x = 1$$

$$\text{Poisson-Integral: } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi}$$

Für die Substitution wird folgendes gewählt:

$$\xi = \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} v_x, d\xi = \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} dv_x$$

Wenn das Ergebnis des Poisson-Integral nun in die Normierungsbedingung inklusive der Substitution eingesetzt wird, dann erhalten wir:

$$A_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

Es wird nun auf  $A_1$  umgeformt:

$$A_1 = \sqrt{\frac{\alpha m}{2\pi}}$$

Unsere Gleichung ist somit:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha m}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha m v_x^2}{2}\right)$$

Der nächste Schritt ist es, die Konstante  $\alpha$  zu ermitteln. Wir wissen bereits über den Gleichverteilungssatz, dass die Kinetische Energie  $\varepsilon_x$  pro Freiheitsgrad gleich sein muss:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_x f(\varepsilon_x) dv_x = \frac{1}{2} k_b T$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 \left(\frac{\alpha m}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha m v_x^2}{2}\right) dv_x = \frac{1}{2} k_b T$$

Dies aufgelöst nach  $\alpha$  ist:

$$\alpha = \frac{1}{k_b T}$$

Wir setzen nun wieder in die  $f(v_x)$  Funktion ein und erhalten somit die Verteilfunktion der Geschwindigkeitskomponente:

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2 k_b T}\right)$$

Analog dazu kann man die Geschwindigkeitskomponente von y und z schreiben.

**Herleitung des Geschwindigkeitsvektor:** Hier erfolgt die Herleitung im 3-Dimensionalen Raum. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit  $f(\vec{v})d\vec{v}$  ein Molekül mit diesem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  zu finden dessen Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  in einem bestimmten Intervall liegen. Dabei ist die Verteilfunktion des Geschwindigkeitsvektor nur das Produkt jeder Geschwindigkeitskomponente:

$$f(\vec{v})d\vec{v} = f(v_x)dv_x \cdot f(v_y)dv_y \cdot f(v_z)dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k_b T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

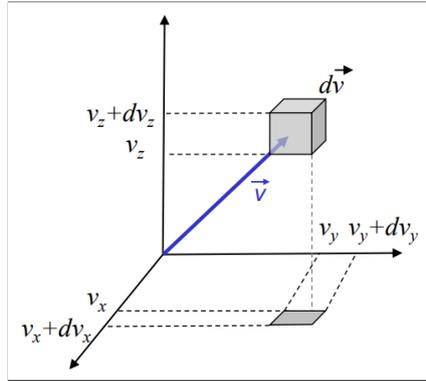


Abb. 59: Geschwindigkeitsvektor

Die Normierung des Integrals mit Grenzen  $-\infty$  bis  $+\infty$  ergibt wieder 1, da hierbei jedes Molekül mit seiner spezifischen Geschwindigkeit vorkommen muss.

Herleitung des **Geschwindigkeitsbetrag**: Hierbei ist nicht die Richtung der Vektoren, sondern der Betrag relevant. Wir vereinfachen und stellen uns eine Kugel vor, deren Kugelschale genau einem Geschwindigkeitsintervall entspricht. Dadurch können wir das Volumen der Kugelschale in die Fläche mal der Dicke aufteilen ( $4\pi v^2 \cdot dv$ ). Das Volumenelement  $d\vec{v} = dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$  kann dann durch  $(4\pi v^2 \cdot dv)$  ersetzt werden:

$$f(v)dv = \left( \frac{m}{2\pi k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right) dv$$

Alternativ kann man die Funktion  $f(v)$  für den Geschwindigkeitsbetrag auch aus der Integration über alle Richtungen des Geschwindigkeitsvektors erhalten (in Kugelkoordinaten).

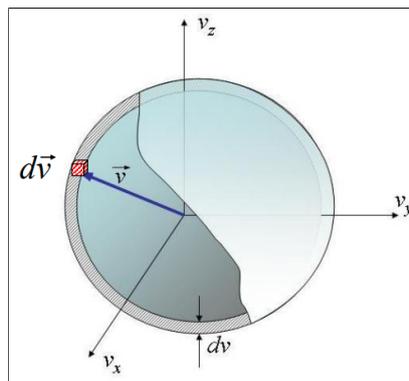


Abb. 60: Geschwindigkeitsbetrag

### 2.7.5 Geschwindigkeitsverteilung Analyse

Im Gegensatz zur Verteilung der Geschwindigkeitskomponente ist die Betragsfunktion unsymmetrisch zu  $v = 0$  und verteilt sich über den gesamten positiven Bereich. Außerdem ist die Betragsfunktion durch den Faktor  $v^2$  auch nicht symmetrisch um einen Mittelwert  $\bar{v}$  verteilt.



Abb. 61: Verteilfunktion Betrag

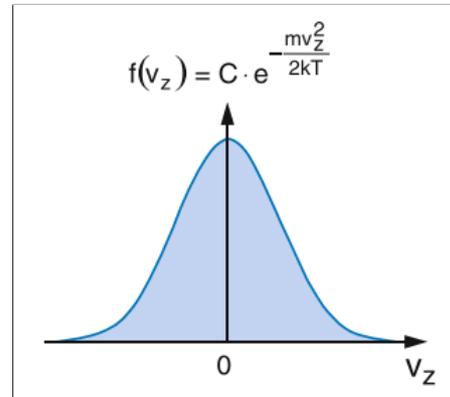


Abb. 62: Verteilfunktion Komponente

Zusätzlich ist die Betragsfunktion  $f(v)$  auch keine Wahrscheinlichkeit sondern eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Nur wenn man über ein Geschwindigkeitsintervall  $v_1$  bis  $v_2$  integriert erhält man eine Wahrscheinlichkeit.

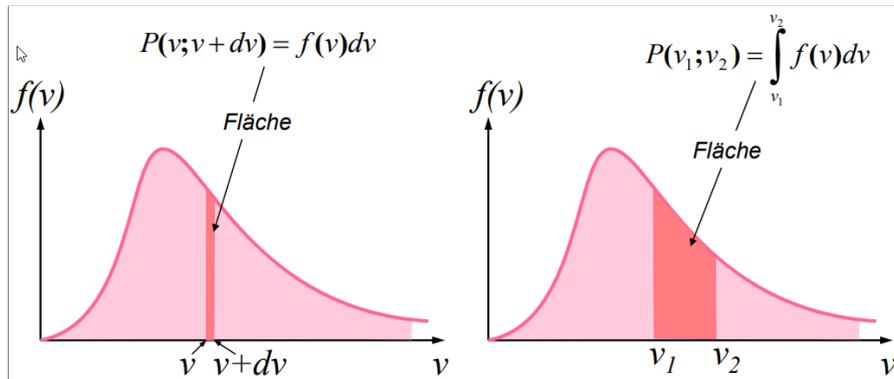


Abb. 63: Verteilfunktion Betrag Wahrscheinlichkeit

Bei der Verteilfunktion für den Geschwindigkeitsbetrag gibt es drei Wichtige Geschwindigkeiten die sich alle berechnen lassen:

- wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_w$
- mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$

- mittleres Geschwindigkeitsquadrat  $\overline{v^2}$

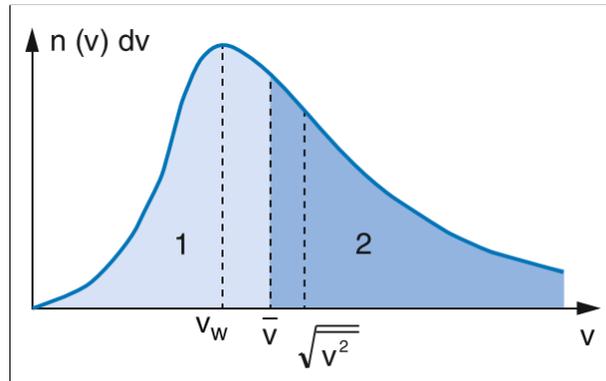


Abb. 64: Betrag Geschwindigkeiten

Herleitung der **wahrscheinlichste Geschwindigkeit**  $v_w$ : Dies kann analog zur Kurvendiskussion überlegt werden. Wir wollen das Maximum einer Kurve erhalten, daher berechnen wir die erste Ableitung ( $\frac{df(v)}{dv}$ ) und setzen anschließend Null (Produkt und Kettenregeln beachten!). Zuletzt muss dann noch auf  $v$  umgeformt werden:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right)$$

$$\frac{df(v)}{dv} = \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 8\pi v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right) - \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right) \cdot \frac{mv}{k_b T}$$

Nun schreiben wir um und kürzen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 8\pi v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right) &= \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right) \cdot \frac{mv}{k_b T} \\ 2 &= \frac{mv^2}{k_b T} \Rightarrow v^2 = \frac{2k_b T}{m} \Rightarrow v_w = \sqrt{\frac{2k_b T}{m}} \end{aligned}$$

Herleitung der **mittleren Geschwindigkeit**  $\bar{v}$ : Hierbei muss ein Integral berechnet werden um auf die mittlere Geschwindigkeit zu kommen. Dabei wird die Geschwindigkeit  $v$  zuvor in die Funktion  $f(v)$  multipliziert:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v \cdot f(v) dv = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_b T}\right) dv$$

Durch ausrechnen dieses Integrals ergibt sich folgendes für die mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_b T}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_w$$

Herleitung der **mittleren Geschwindigkeitsquadrates**  $\overline{v^2}$ : Auch hier muss wieder ein Integral gelöst werden, allerdings wird die Funktion  $f(v)$  mit  $v^2$  multipliziert:

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3k_b T}{m}$$

Dies steckt ebenfalls in der mittleren kinetischen Energie eines Teilchen mit drei Freiheitsgraden:

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_b T$$

Das Mittlere Geschwindigkeitsquadrat wird oft in einer Wurzel angeschrieben. So wird es auch in den Diagrammen repräsentiert:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_w$$

Der Vergleich aller drei Geschwindigkeiten zeigt, dass diese nicht dem selben Wert entsprechen.  $v_w$  stellt dabei die maximale Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeit da,  $\bar{v}$  teilt die gesamte Wahrscheinlichkeitskurve in zwei gleich große Teile und  $\sqrt{\overline{v^2}}$  repräsentiert die Geschwindigkeit für die mittlere Energie eines Teilchen mit drei Translationsfreiheitsgraden.

Es ist zu sehen, dass die Geschwindigkeitsverteilung stark Temperaturabhängig ist

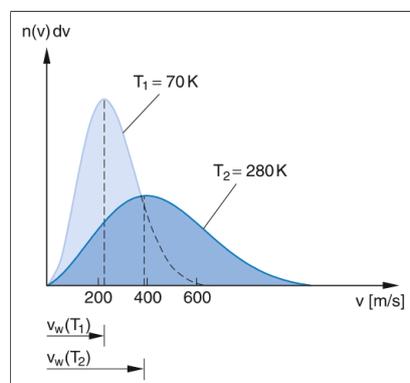


Abb. 65: Verteilung bei Temperaturen

Beispiele für Berechnungen von Gasen:

$$\text{Sauerstoff: } M = 32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

Wir können die Molmasse für Sauerstoff umrechnen in das Gewicht  $m$  indem mit der Avogadrozahl dividiert wird:

$$m = \frac{M}{n} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}} = 5.314 \cdot 10^{-26}$$

Diese Masse können wir nun direkt in die Gleichungen einsetzen und erhalten bei einer Temperatur von 273K folgende Werte:

$$v_w = \sqrt{\frac{2k_bT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{5.314 \cdot 10^{-26}}} \approx 377 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_bT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\pi \cdot 5.314 \cdot 10^{-26}}} \approx 425 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_bT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{5.314 \cdot 10^{-26}}} \approx 461 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Es ist zu sehen, dass  $v_w < \bar{v} < \sqrt{\overline{v^2}}$ . Hierbei ist das Gewicht der Moleküle sowie die Temperatur ausschlaggebend für die Verteilung. Leichtere Gase haben daher eine höhere Geschwindigkeitsverteilung. So kann Wasserstoff durch sein geringes Gewicht auch die Erdanziehung überwinden. Deshalb gibt es in der Erdatmosphäre praktisch keinen freien Wasserstoff.

### 2.7.6 Stoßquerschnitt und mittlere freie Weglänge

### 2.7.7 Transportprozess in Gasen

Gase können sich durch unterschiedliche Eigenschaften Verteilen bzw. transportiert werden:

- **Makroskopischer Transport:** Durch Kraft-Druckdifferenzen entsteht eine Gassströmung.
- **Massetransport:** Wenn keine Druckdifferenz besteht, dann verteilt sich ein Gas auf Grund seiner statistischen Bewegung. Dies wird auf Diffusion genannt. Die treibende Kraft dahinter ist die Konzentrationsdifferenz.
- **Energietransport:** Aufgrund der Wärmeleitung welche durch die Temperaturdifferenz entsteht.
- **Impulstransport:** Der Impulstransport beschäftigt sich mit der Viskosität. Die Viskosität entsteht dadurch, dass ein Gas unterschiedliche Geschwindigkeiten bei Strömung hat.

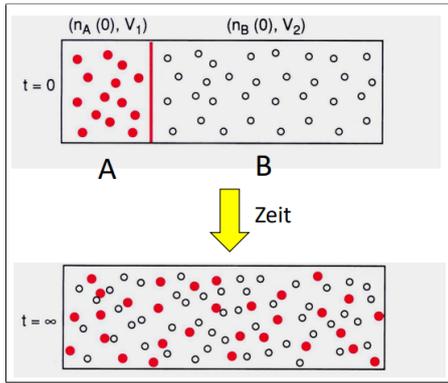


Abb. 66: Diffusion

Bei der Diffusion wandern Moleküle einer Sorte A durch ein Gas der Sorte B. Dabei kommt es zu einer gleichmäßigen räumlichen Verteilung der Konzentration. Obwohl die mittlere freie Weglänge  $\Lambda$  nur zwischen 10 und 100 nm ist (bei  $p = 1$  bar), können die Moleküle in kurzer Zeit Wege von mehreren Metern zurücklegen.

Konkret gesagt ist die Diffusion der Nettotransport von Teilchen aus einem raumbereich höherer Konzentration in ein Gebiet niedrigerer Konzentration. Die Diffusion kann durch das Ficksche Gesetz erklärt werden. Dabei besagt das erste Ficksche Gesetz, dass die Teilchenstromdichte  $j_x$  dem Konzentrationsgefälle proportional ist:

$$j_x = -D \cdot \frac{dn}{dx}$$

Dabei ist  $D$  die Diffusionskonstante ( $\frac{m^2}{s}$ ). Für den 3-Dimensionalen Fall kann dann geschrieben werden:

$$\vec{j} = -D \cdot \nabla n$$

Im ersten Fickschen Gesetz geht man von einem stationären Fall der Teilchenkonzentration aus. Das bedeutet, dass die Teilchenmenge konstant bleibt und sich nicht mit der Zeit ändert:

$$\frac{dn_A}{dx} = \text{const} \neq f(t)$$

Falls es kein stationärer Fall ist und sich die Teilchenkonzentration an der Stelle  $x$  mit der Zeit ändert, dann muss das zweite Ficksche Gesetz verwendet werden.

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}$$

Allgemein ist zu sagen, dass Teilchen mit großer Masse langsamer diffundieren. Dies liegt an der niedrigeren kinetischen Energie und demnach auch an der langsameren Geschwindigkeit.

Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von Gasen kann über die folgende Gleichung ermittelt werden:

$$\lambda = \frac{1}{12} f \cdot f_B \cdot \bar{v}$$

Über die mittlere freie Weglänge  $\Lambda = \frac{1}{n\sigma}$  kann umgeformt werden zu:

$$\lambda = \frac{1}{12} f \cdot n \cdot k_B \bar{v} \Lambda$$

### 3 Strömende Flüssigkeiten und Gase

in der Fluid-Mechanik ist das Auffinden der Strömungsgeschwindigkeit eine zentrale Aufgabe. Die Strömungsgeschwindigkeit wird vektoriell als  $\vec{u}(r, t)$  angegeben. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit nur von  $r$  abhängig ist, spricht man von stationären Strömungen ( $\vec{u}(r)$ ). Dabei ist die Geschwindigkeit an jedem Ort zeitlich konstant. Die Strömungsgeschwindigkeiten sind dabei Tangenten die an den Stromlinien definiert werden. Diese Stromlinien können unterschiedlich dicht voneinander geführt werden. Dabei ist die Stromliniendichte nichts anderes als die Flussdichte:  $\text{Flussdichte} = \frac{\text{Menge des Mediums}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$  Die Kräfte die auf ein Volumenelement wirken, werden auch als Druckkraft definiert:

$$\vec{F}_p = -\vec{\nabla}p \cdot \Delta V$$

Die Schwerkraft  $\vec{F}_G$  beschleunigt das Volumenelement in Richtung der Gravitation und die Reibungskraft  $\vec{F}_R$  bremst  $\Delta V$  ab. Als Vergleich kann man sich die Reibung des Objektes an der Flüssigkeit vorstellen. Eine Masse wird also durch das zweite Newtonsche Axiom von diesen drei Kräften definiert:

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_G + \vec{F}_R = \Delta m \vec{a} = \rho \Delta V \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Bezüglich der Reibung gibt es zwei Grenzfälle:

$$F_R \ll F_p, F_G$$

ideale Flüssigkeiten (Strömung von Luft entlang glatter Tragflächen, flüssiges He durch Rohre)

$$F_R \gg F_p, F_G$$

zähe Flüssigkeiten (Honig, Glyzerin, Schweröl durch Rohre)

Reale Flüssigkeiten sind genau zwischen diesen beiden Fällen. Hier wird auch zwischen Laminaren und Turbulenten Strömungen unterschieden. Bei den laminaren Strömungen durchmischen sich die Stromlinien nicht, bei turbulenten jedoch schon.

#### 3.1 Euler-Gleichung

Sie Strömungsgeschwindigkeit kann als Ableitung des Weges nach der Zeit verstanden werden:

$$d\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dies kann nun zusätzlich Zeitabhängig sein. Die allgemeine Euler-Gleichung lautet dann:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho}$$

### 3.2 Kontinuitätsgleichung

Wenn eine Flüssigkeit betrachtet wird, die durch ein Rohr mit einem Querschnitt  $A_1$  fließt dann hat die Flüssigkeit eine gewisse Geschwindigkeit. Wenn das Rohr nun aber eine Stelle hat, an der dieser Querschnitt kleiner oder größer wird, so muss sich auch die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ändern um weiterhin die selbe Menge der Flüssigkeit zu transportieren. Dies kann man als eine Gleichung schreiben welche die Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$\rho A_1 u_{x1} = \rho A_2 u_{x2} \Leftrightarrow \frac{u_{x1}}{u_{x2}} = \frac{A_2}{A_1}$$

Demnach fließt die Flüssigkeit in einem Engeren Abschnitt des Rohres schneller. Die Stromdichte  $\vec{j}$  hat demnach den Zusammenhang, dass diese von der Transportierten Masse und von der Geschwindigkeit abhängt:

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{u}$$

Die Dichte ist dabei nichts anderes als die Masse die durch das Volumen:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

Somit kann die Stromdichte auch umgeschrieben werden:

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{u} \Rightarrow j = \frac{dM}{dV} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dM}{Adt}$$

Die Massenstromstärke berechnet sich dann noch über die Querschnittsfläche  $A$ :

$$I = j \cdot A = \frac{dM}{dt}$$

### 3.3 Bernoulli-Gleichung

Wenn ein Querschnitt eines Rohrs betrachtet wird kann auf diese Querschnittsfläche eine Kraft ausgeübt werden um das Flüssigkeitsvolumen um  $\Delta x_1$  zu verschieben. Gleiches muss nun im selben Rohr an einer Engeren Stelle passieren damit der Durchfluss konstant bleibt. Dies kann über die Arbeit ausgedrückt werden:

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1$$

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta x_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2$$

Da sich nun die Flüssigkeit in der Engeren Stelle schneller durch das Rohr bewegen muss, kann die Änderung der potentiellen und Kinetischen Energie berechnet werden:

$$\Delta E_{pot} = p_2 \Delta V_2 - p_1 \Delta V_1$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \Delta V_2 u_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V_1 u_1^2$$

Bei idealen Reibungsfreien Flüssigkeiten kann dann definiert werden, dass  $E_{kin} + E_{pot} = const$  sein muss. Dementsprechend kann die Bernoulli-Gleichung als folgende definiert werden:

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho \Delta V_1 u_1^2 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho \Delta V_2 u_2^2$$

Da Flüssigkeiten nicht komprimierbar sind, kann  $\Delta V_1 = \Delta V_2$  gesetzt werden. Es kürzt sich nun heraus:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 = p_0 = const$$

Die Bedingung um diese Gleichung anwenden zu können ist, dass es eine reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeit, die in einem waagrecht Rohre fließt ist. Falls allerdings eine Strömung in schräger Höhe berechnet werden soll, so kann  $E_{pot} = \Delta mgh = \rho gh \Delta V$  herangezogen werden. Dies eingesetzt in die Gleichung ergibt:

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho u^2 = const$$

### 3.4 Strömung einer idealen Flüssigkeit

Wenn eine Kugel von einer idealen Flüssigkeit umströmt wird, so erfährt diese Kugel keine Kraft. Grund dafür ist, dass sich die Druckkraft die auf jeder Kugelseite besteht gegenseitig aufhebt. Wenn nun aber ein Objekt mit Geschwindigkeit  $v_0$  in eine Flüssigkeit gebracht wird, so entsteht Reibung. Dabei bewegen sich die Flüssigkeitsschichten relativ zueinander was dazu führt, dass diese auch ihre benachbarten Schichten Reibung erzeugen. In Flüssigkeiten erzeugt dies ständige Brechung und Wiederherstellung der Van-der-Waals Bindungen. Im idealen Gas treten Moleküle in die Nachbarschichten ein (Diffusion). Dies führt zum Geschwindigkeitsausgleich der Schichten (Bremsung). Durch diese Reibung muss eine Kraft angelegt werden, um einen Körper weiterhin mit  $u_0 = const$  zu bewegen. Die Reibung kann mittels des Geschwindigkeitsgradienten berechnet werden:

$$F_R = -n\eta A \cdot \left| \frac{du}{dy} \right|$$

Die Reibungskraft steht dabei immer in die entgegengesetzte Richtung der Bewegung. Hierbei muss auch immer die Rechtwinklige Komponente der Bewegungsrichtung hergenommen werden ( $dy$ ).  $\eta$  beschreibt dabei die Viskosität/dynamische Zähigkeit und  $A$  die Fläche des Körpers. Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab, da dann die molekularen Bindungen gegenüber der Bewegung der Moleküle an Bedeutung verlieren. Als Beispiel dafür könnte man Honig betrachten. Hier nimmt die Viskosität ebenfalls mit steigender Temperatur ab (er tropft schneller). Die Viskosität von Gasen nimmt dagegen mit steigender Temperatur zu, da sie auf der Bewegung von Molekülen beruht, welche mit der Temperatur steigt. Die Grenzschicht ist dabei die Fläche, die durch die Reibung betroffen wird. Sie kann sich mit folgender Gleichung berechnen:

$$D = \sqrt{\frac{\eta L}{\rho u_0}}$$

Dabei ist  $L$  die Länge des Objektes das in die Flüssigkeit eingetaucht wird.

### 3.5 Stokessches Gesetz

Das Stokessches Gesetz wurde experimentell gefunden und ist definiert als die Reibungskraft  $F_R$  einer Kugel die in eine Flüssigkeit getaucht wird:

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta R_K \cdot \vec{u}$$

Dabei ist  $R_K$  der Radius der Kugel. Wenn diese nun in eine Flüssigkeit getaucht wird, dann stellt sich nach einer zeit eine stationäre Fallgeschwindigkeit ein. Wenn nun alle Kräfte addiert werden, so darf keine Kraft mehr wirken:

$$\vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_R = 0$$

Dies kann nun auf  $u_0$  umgeformt werden und man erhält die Geschwindigkeit der Kugel:

$$u_0 = \frac{2gR^2(\rho_K - \rho_{Fl})}{9\eta}$$

Dabei ist  $\vec{F}_A$  die Auftriebskraft die sich über die Dichte der Flüssigkeit  $\rho_{Fl}$  berechnet.

### 3.6 Laminare Strömung durch Rohre

Wenn Flüssigkeit durch ein Rohr strömt, dann ist  $u = u(r)$ . Die Geschwindigkeit ist also abhängig vom gewählten Radius. Die Druckkraft kompensiert hierbei wieder die Reibungskräfte:

$$F_p - F_R = 0$$

Die Druckkraft und die Reibungskraft ergibt sich dann zu:

$$\pi r^2 \cdot (p_1 - p_2) = \eta \cdot 2r\pi \cdot L \frac{du}{dr}$$
$$\frac{du}{dr} = \frac{r \cdot (p_1 - p_2)}{\eta 2L}$$

Wenn nun der gesamte Ausdruck nach  $r$  integriert wird, so ergibt sich:

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{\eta 2L} \int_r^R r dr = (R^2 - r^2) \frac{p_1 - p_2}{\eta 4L}$$

Die Integrationskonstante wird durch die Bedingung  $u(R) = 0$ . Es kann nun die Stromstärke  $I = \frac{dV}{dt}$  durch den gesamten Rohrquerschnitt ( $0 \leq r \leq R$ ) berechnet werden:

$$I = \int_A u(r) dA = \frac{(p_1 - p_2)}{\eta 4L} \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{\eta 8L} (p_1 - p_2)$$

Es entsteht eine  $R^4$  Abhängigkeit. Dadurch führt eine Verdopplung des Radius zu einer 16 mal größeren Flussmenge pro Zeiteinheit. Der Strömungsleitwert wird oft getrennt angeschrieben als  $G$ :

$$G = \frac{\pi R^4}{\eta 8L}$$

Der Kehrwert davon wird als Strömungswiderstand  $W$  bezeichnet:

$$W = \frac{\eta 8L}{\pi R^4}$$

### 3.7 Navier-Stokes Gleichung

Die Navier-Stokes Gleichung stellt eine allgemeine Bewegungsgleichung für  $\Delta V$  einer realen viskosen strömenden Flüssigkeit auf:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{u}$$

In dieser Gleichung steckt ebenfalls die Reibungskraft, Druckkraft und Schwerkraft. Der linke Teil vor dem äquivalent beschreibt die Bewegung, der rechte Teil die Kräfte. Die Navier-Stokes Gleichung stellt somit eine Differentialgleichung 2. Ordnung dar. Falls eine ideale Flüssigkeit gewählt wird, so wird  $\eta = 0$  was dazu führt das die Gleichung nur noch zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung wird:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho}$$

Dabei ist  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$  ortsfest und  $(\vec{u} \cdot \nabla)$  beschreibt eine räumliche Änderung von  $\vec{u}$  bei der Bewegung  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ .

### 3.8 Magnuseffekt

Wenn Flüssigkeit um ein Hindernis strömt so entsteht Zirkulation und Wirbel. Dabei handelt es sich um eine laminare Strömung wenn  $u$  klein ist. Wenn  $u > u_{grenz}$  ist, dann kommt es zu Wirbelbildung. Dies ist abhängig von  $\eta$  und der Geometrie des Körpers. Im Gebiet um das Wirbelzentrum hat die Flüssigkeit eine Drehung wie ein starrer Körper. Die Rotationsgeschwindigkeit ist dabei linear vom Abstand zum Wirbelzentrum (mit Radius  $r$ ) abhängig ( $\omega = const$ , die Teilchen drehen sich um eine Achse). Der Strömungswiderstand ist umso größer, je größer der verwirbelte Bereich der Strömung ist.

Wenn ein Zylinder also statisch im Raum steht und er einem Strom ausgesetzt ist, so gehen die Stromlinien an der Ober- und Unterseite vorbei. Die Stromlinien werden dabei gequetscht, dadurch sind diese enger beisammen (nur beim passieren des Zylinders). Wenn nun aber der Zylinder eine rotation erhält, so rotiert auch die Randschicht durch die Reibungskräfte. Diese Zirkulation bewirkt dann, dass der Zylinder, abhängig von seiner Rotationsrichtung bewegt wird. Dies ist dadurch gegeben, dass die Stromlinien an der Seite an der die tangentielle Geschwindigkeit der Rotation in die selbe Richtung des Stromes fließt, eine Geschwindigkeitserhöhung erfahren wodurch diese enger zusammen liegen. Dadurch ist die Druckkraft auf einer Seite des Zylinders nicht mehr gleich wie auf der gegenüberliegenden.

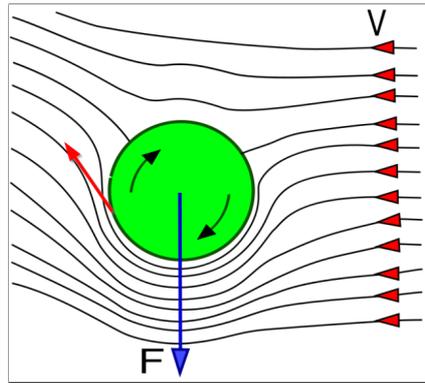


Abb. 67: Magnuseffekt

## 4 Wärmelehre

### 4.1 Wärmeenergie

Die Wärmeenergie ist eine thermische Energie die als ungeordnete Bewegung der Atome oder Moleküle in einem Stoff gespeichert ist. Sie ist zurückzuführen auf eine Form der mechanischen Energie

### 4.2 Thermische Ausdehnung

Durch eine Temperaturänderung gibt es eine relative Längenänderung:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

Umgeschrieben auf die neue Länge nach Temperaturabhängiger Längenänderung:

$$L(T) = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Dabei ist  $\alpha$  der lineare Ausdehnungskoeffizient der Materialabhängig ist. Falls  $\alpha(T)$  nicht Konstant (also nicht linear) ist, muss der Flächenausdehnungskoeffizient verwendet werden:

$$\alpha(T) = \alpha_0 + \beta \Delta T$$

$$L(T) = L_0 \cdot (1 + \alpha_0 \Delta T + \beta \Delta T^2)$$

Bei Betrachtung einer Kubischen Ausdehnung muss der Raumausdehnungskoeffizient  $\gamma$  verwendet werden. Dabei ist aber zu beachten ob der Körper sich isotrop (in alle Richtungen gleichmäßig) oder anisotrop ausdehnt. Isotrop:

$$V(T) = L(T)^3 = L_0^3 \cdot (1 + \alpha \Delta T)^3 = V_0 \cdot (1 + \alpha \Delta T)^3 = V_0 \cdot (1 + 3\alpha \Delta T)$$

$$V(T) = V_0 \cdot (1 + \gamma \Delta T) \Rightarrow \gamma = 3\alpha$$

Anisotrop:

$$V(T) = V_0 \cdot (1 + \alpha_1 \Delta T) \cdot (1 + \alpha_2 \Delta T) \cdot (1 + \alpha_3 \Delta T)$$
$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow V(T) = V_0 \cdot (1 + \gamma \Delta T)$$

Bei idealen Gasen ist die Thermische Ausdehnung folgendermaßen:

$$\text{Für } V \propto T \text{ (P = const): } V(T) = V_0 \cdot (1 + \gamma_v \cdot T_C)$$

$$\text{Für } p \propto T \text{ (V = const): } p(T) = p_0 \cdot (1 + \gamma_p \cdot T_C)$$

$$\gamma_p = \gamma_v \equiv \gamma = \frac{1}{T}$$

### 4.3 Wärmemenge und innere Energie

Die Richtung des Energieflusses ist immer von der warmen zur kalten Substanz. Die transportierte Energie wird dabei Wärme genannt. Wärme stellt dabei die molekulare kinetische Energie da. Wenn Wärme fließt ist sie die Energie die übertragen wird. Wenn die Wärme dann übertragen wurde ist sie keine Wärme mehr sondern innere Energie. Innere Energie ist dabei ein Sammelbegriff für alle Energieformen innerhalb einer Substanz (potentielle Energie, kinetische Energie). Somit enthält eine Substanz keine Wärme, sondern innere Energie.

### 4.4 Wärmekapazität und spezifische Wärme

Durch Wärmezufuhr  $\Delta Q$  erhält ein Körper eine Temperaturerhöhung  $\Delta T$ . Dadurch wird die Wärmekapazität  $C$  definiert:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Dabei ist  $\Delta T$  vom Material und der Masse abhängig. Es wird dadurch die spezifische Wärme  $c$  (kleines c) eingeführt:

$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}$$

Die spezifische Wärme ist dabei die Wärmemenge die notwendig ist, um die Temperatur von 1 kg einer bestimmten Substanz um  $\Delta T = 1$  K zu erhöhen.

### 4.5 spezifische Molwärme und innere Energie idealer Gase

Die spezifische Molwärme ist die Wärmemenge die einem mol einer Substanz zugeführt werden muss, um die Temperatur um  $\Delta T = 1$  K zu erhöhen:

$$C = \frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T} \text{ oder } \Delta Q = nC \Delta T$$

Die spezifische Wärme eines Gases bei  $V = const$  wird als  $C_v$  definiert. Die Innere Energie eines Idealen Gases ist über die kalorische Zustandsgleichung definiert:

$$U = \frac{f}{2} NkT$$

Umgeschrieben ist dies:

$$U = \frac{f}{2} N_A k_b T = \frac{f}{2} RT$$

Wenn nun Wärme  $\Delta Q$  zugeführt wird, wird die innere Energie um  $\Delta U = \Delta Q$  erhöht (bei  $V = \text{const}$ ):

$$\Delta U = \Delta Q = C_v \cdot \Delta T = \frac{f}{2} R \Delta T \Rightarrow C_v = \frac{f}{2} R$$

Dies ist die Molwärme bei  $V = \text{const}$  und  $n = 1$ . Wenn nun aber nicht das Volumen sondern der Druck konstant ist, so kann für  $p = \text{const} \equiv C_p$  die Gleichung aufgestellt werden. Dabei kann man sich einen geschlossenen Zylinder vorstellen, dem  $\Delta Q$  zugeführt wird. Wenn der Druck  $p = \text{const}$  bleibt, dann wird die zugeführte Wärme in innere Energie aber auch in Arbeit umgewandelt. Der Grund warum hier auch Arbeit entsteht ist, dass durch den konstanten Druck der Zylinder ein neues Volumen einnehmen muss.

$$\Delta Q = \Delta U + W = C_v \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = C_v \cdot \Delta T + R \cdot \Delta T = (C_v + R) \cdot \Delta T$$

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = C_v + R$$

$$C_v = \frac{f}{2} R \Rightarrow C_p = \frac{f}{2} R + R = \frac{1}{2}(f + 2)R$$

Das Verhältnis aus  $C_p$  und  $C_v$  wird Adiabatenindex  $\kappa$  genannt:

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{f + 2}{f} \equiv \kappa$$

## 4.6 Spezifische Wärme fester Körper

Atome in festen Körpern können keine Rotations- und keine Translations-Freiheitsgrade haben. Sie können nur um feste Ruhelage schwingen.

$$f_{\text{vibr}} = 3n - 6$$

Die spezifische Molwärme ist daher:

$$C_v = 3N_A k_b = 3R$$

Bei einer Temperatur von  $T = 0$  gibt es allerdings noch keine Schwingungen da diese noch nicht angeregt sind. Daher ist  $C_v(0K) = 0$ . Erst mit steigender Temperatur wird die Zahl der anregbaren Schwingungen immer größer. Bei genügend hohen Temperaturen sind daher auch alle Schwingungen angeregt und  $C_v$  nimmt den Grenzwert  $3R$  ein.

## 4.7 Konvektion

In Flüssigkeiten und Gasen wird Wärme meist durch Konvektion transportiert. Dabei entstehen Dichteunterschiede durch heißer und kalter Substanz was zu einer Strömung führt. Dies passiert auch in der Erdatmosphäre (Land und Meer bei Tag und Nacht).

## 4.8 Wärmeleitung

Durch Wärmeleitung entsteht Energietransport aber kein Massetransport in einem Material (Wechselwirkung/Stöße von Atomen/Molekülen und Elektronen). Dabei entsteht ein Wärmestrom:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

In Festkörpern gibt es durch das große Schermodul nur Wärmeleitung (keine Konvektion). Wenn ein Körper (z.B. ein Stab) mit Querschnitt  $q$  an beiden Enden auf unterschiedlichen Temperaturen gehalten wird, so stellt sich nach einer Zeit ein stationärer Zustand ein:

$$\frac{dQ_{ein}}{dt} = \frac{dQ_{aus}}{dt}$$

Der Temperaturgradient  $\frac{dT}{dx}$  wird konstant. Die Temperatur nimmt gleichmäßig vom wärmeren zum kälteren Ende hin ab. Durch Querschnitt  $A$  des Stabes fließt pro Zeiteinheit die Wärmemenge  $dQ$ . Es entsteht ein Wärmestrom  $I = \frac{dQ}{dt}$ :

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \frac{dT}{dx}$$

Stationärer Fall:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}$$

Nicht-Stationärer Fall:

$$\frac{dQ_1}{dt} \neq \frac{dQ_2}{dt}$$

Bei einem 1-Dimensionalen Fall fließt bei  $x_1$  folgender Wärmestrom:

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\lambda \cdot A \frac{\partial T}{\partial x}$$

Der Wärmeabstrom an  $x_2$  ist dann als  $x_2 = x_1 + dx$  definiert. Bei nichtlinearen Temperatur Gefälle muss eine Taylorentwicklung um  $x_1$  gemacht werden:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_2} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

Daher fließt an  $x_2$  folgender Wärmeabstrom heraus:

$$\frac{dQ_2}{dt} = -\lambda \cdot A \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right)$$

Die Wärmebilanz für das Volumenelement  $dV$  ist daher:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt} = \lambda \cdot A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dV$$

Bei Metallen können Ladungsträger auch Wärme transportieren. Das Gesetz von Wiedemann-Franz definiert dafür, dass das Verhältnis zwischen thermischer Leitfähigkeit  $\lambda$  und elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma$  in einem Metall als nahezu proportional zur Temperatur  $T$  ist. Die Variable  $a$  ist dabei die Lorenz-Zahl die als Proportionalitätskonstante definiert ist ( $a \approx 2.45 \cdot 10^{-8} \frac{V^2}{K^2}$ ):

$$\frac{\lambda}{\sigma} = a \cdot T$$

Für den Temperatúrausgleich in Festkörpern und in Gasen spielt die Temperaturleitfähigkeit (od. Temperaturleitzahl) eine wichtige Rolle. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Für Festkörper ist  $\lambda$  groß, da eine stärkere Kopplung zwischen Nachbaratomen besteht. Für Gase ist dafür  $\rho$  klein. Dadurch gleichen sich in Gasen Temperaturunterschiede vergleichbar schnell aus wie in Festkörpern.

## 4.9 Die Hauptsätze der Thermodynamik

In der Thermodynamik gibt es extensive und intensive Parameter.

Extensive Parameter sind additiv und sind von der Masse des Gesamtsystems abhängig. Darunter fallen Volumen  $V$ , Wärmekapazität  $c$ , Energie  $U$  und die Teilchenzahl  $N$ .

Intensive Parameter hingegen sind nicht additiv und masseunabhängig. Hier zählen Parameter wie Druck  $p$ , Temperatur  $T$ , Dichte  $\rho$ , Teilchendichte  $n$ , spezifische Wärme  $C_m$  und Molenergie.

Um die Hauptsätze der Thermodynamik zu definieren, greift man auf zwei grundlegende externe Gleichungen zurück. Allgemeine Gasgleichung:  $pV = nRT = Nk_bT$   
 kalorische Zustandsgleichung:  $U = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT$

### 4.9.1 Arbeit

In der Thermodynamik spielt die verrichtete Arbeit eine wichtige Rolle. In der Klassischen Mechanik ist die Arbeit folgendermaßen definiert:

$$W = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Da in der Thermodynamik allerdings der Druck die Kraft beinhaltet, verwendet man hierbei folgende Herleitung für die Arbeit:

$$W = \int F ds = \int \frac{F}{A} \cdot A \cdot ds = \int p dV$$

Hierbei werden zwei Fälle unterschieden:

- Kompression: Die Arbeit, die **an** einem System verrichtet wird, ist positiv.
- Expansion: Die Arbeit, die **vom** System verrichtet wird, ist negativ.

Deshalb schreibt man für die Arbeit:

$$dW = -pdV$$

Essentiell ist, dass es Differentiale gibt die nicht vollständig sind. Dies sind Differentiale die ebenfalls von weiteren Parametern abhängen. Wenn sich beispielsweise das Volumen und die Temperatur gleichzeitig ändern, so würde man den Druck als  $p = p(T, V)$  definieren. Das Totale Differential  $d'$  drückt man dann folgendermaßen aus:

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV$$

oder

$$dp = d'p_T + d'p_V$$

Das bedeutet, dass eine Funktion  $f$  die einen Kreisprozess beschreibt folgendermaßen für vollständige und unvollständige Differentiale definiert ist:

$$\oint df = 0$$

$$\oint d'f \neq 0$$

Die Arbeit hat demnach die Prozessgröße:

$$d'W = F ds = p dV \Rightarrow \oint d'W \neq 0$$

Die Arbeit ist dabei ungleich null, da diese von den Zuständen von Weg 1 und Weg 2 abhängt. Der Grund dafür ist, dass das Integral  $W = \int_2^1 p dV$  die Variable  $p$  enthält und dieser Druck von  $V$  und  $T$  abhängig ist. Daher würde man dies in korrekter Weise folgend anschreiben:

$$W = \int_2^1 p(V, T) dV$$

Im  $p$ - $V$ -Diagramm ist die Arbeit also die Fläche unter der Kurve.

#### 4.9.2 Erwärmung eines Gases

Wenn berechnet werden will, wie viel sich ein Gas  $(p, V)$  von  $T$  auf  $T + dT$  ändert, so greift man auf das Differential der Wärme  $Q$  zurück. Diese ist wieder ein unvollständiges Differential ( $d'Q$ ). Man kann nun zwei unterschiedliche Prozesse untersuchen:

- $V = \text{const} \Rightarrow d'Q_1 = C_V dT$
- $p = \text{const} \Rightarrow d'Q_2 = C_p dT$

Wir wissen aber, dass  $C_V \neq C_p$  ist und daher  $d'Q_1 \neq d'Q_2$  sein kann.

#### 4.9.3 Arten von Systemen

Wir unterscheiden drei Arten von Systemen:

- Abgeschlossenes System: kann mit Umgebung weder Stoff noch Energie austauschen (Thermoskanne)
- Geschlossenes System: kann mit seiner Umgebung Energie, aber keinen Stoff austauschen (Luftballon)
- Offenes System: Kann mit seiner Umgebung Energie und Stoff austauschen (Fahrradpumpe)

Bei einem nach außen, völlig abgeschlossenem System wird nach gewisser Zeit ein Gleichgewichtszustand erreicht. Dabei definiert man das thermische Gleichgewicht, dass die Temperatur homogen über das System verteilt. Bei einem Glas Wasser wäre dass, wenn die Außentemperatur gleich der Temperatur des Systems ist. Außerdem gibt es ein mechanisches Gleichgewicht, welches definiert, dass der Druck innerhalb eines Systems gleich dem Druck außerhalb ist.

#### 4.9.4 0. Hauptsatz

Der nullte Hauptsatz der Thermodynamik besagt:

Wenn ein System A sich mit einem System B sowie B sich mit einem System C im thermischen Gleichgewicht befinden, so befindet sich auch A mit C im thermischen Gleichgewicht.

Es bedeutet, das Gleichgewicht ist transitiv.

#### 4.9.5 1. Hauptsatz

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besitzt zwei Definitionen:

- **Äquivalenzprinzip (Thomson)**: Wenn eine Menge mechanischer Arbeit aus thermischen Quellen erzeugt bzw. in thermischen Effekten vernichtet wird, so verschwindet bzw. entsteht gleiche Menge Wärme. (z.B. in Wärmekraftmaschine:  $Q_1 - Q_2 = W$ )

- **Planksche Formulierung:** Es ist nicht möglich, eine periodisch funktionierende Maschine zu konstruieren, die Energie aus Nichts erzeugt. (Perpetuum Mobile erster Art  $\rightarrow$  Wirkungsgrad kann nicht höher als 100%)

Die Definition der Wärmeenergie ist die Energieübertragung bei konstanten extensiven Parametern (Volumen  $V$  oder Teilchenzahl  $N$ ). Die Arbeit ist dabei durch die Energieänderung eines Systems bei thermischer Isolierung definiert.

Die mathematische Formulierung des Ersten Hauptsatzes ist durch den Kreisprozess gegeben. Dabei ist  $Q$  die dem System zugeführte Wärme und  $W$  die am System verrichtete Arbeit. Der Kreisprozess geht dabei über infinitesimale Schritte, die bei jedem Schritt Wärme  $d'Q$  zuführt und die Arbeit  $d'W$  leistet. gesamte Wärmezufuhr:  $Q = \oint d'Q$   
gesamte Arbeit:  $W = \oint d'W$

Aus dem Äquivalenzprinzip (1. HS nach Thomson) folgt die Nebenbedingung  $Q = -W$ . Wenn dies nun mit den unvollständigen Differentialen vervollständigt wird, so ergibt sich:

$$\oint d'Q = - \oint d'W \Rightarrow \oint d'Q + \oint d'W = 0 \Rightarrow \oint (d'Q + d'W) = 0$$

genau so ist die makroskopische Definition der inneren Energie definiert:

$$dU = d'Q + d'W \Rightarrow \oint dU = 0$$

Dabei stellt  $dU$  nun ein vollständiges Differential da und  $U$  wird zu einer Zustandsfunktion. Die Interpretation dazu steckt im Energieerhaltungssatz: Die Summe der einem System von außen zugeführten Wärme  $d'Q$  und der am System geleistete Arbeit  $d'W$  ist gleich der Zunahme seiner inneren Energie  $dU$ . Da  $U$  nun eine Zustandsgröße ist, ist es zusätzlich wegunabhängig. Der Erste Hauptsatz kann nun mit der Definition von  $d'W$  über das Integral des Druckes  $p$  nach dem Volumen  $V$  ausgedrückt werden:

$$dU = d'Q - pdV$$

Mit dieser Gleichung des ersten Hauptsatzes können nun alle 4 speziellen Prozesse definiert werden. Die Prozesse dabei sind:

- isochore Prozesse ( $V = const$ )
- isobare Prozesse ( $p = const$ )
- isotherme Volumenänderung ( $T = const$ )
- Adiabatische Prozesse ( $d'Q = 0$ )

**Isochore Prozesse** ( $V = const, dV = 0$ ): Die Wärme wird vollständig zur Erhöhung der Temperatur  $T$  verbraucht. Der Druck  $p$  steigt dabei.

$$(dU)_V = d'Q = C_V dT$$

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

**isobare Prozesse** ( $p = \text{const}$ ,  $dp = 0$ ): Hierfür wird eine neue extensive Zustandsfunktion (Enthalpie  $H$ ) definiert:

$$H \equiv U + pV$$

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

Wir nehmen nun wieder die Gleichung des ersten Hauptsatzes  $dU = d'Q - pdV$  her und setzen diese für  $dU$  ein:

$$dH = dU + pdV + Vdp \Rightarrow dH = d'Q + Vdp$$

Da es sich um einen isobaren Prozess handelt und somit  $dp = 0$  ist, können wir die Gleichung für die Enthalpie  $H$  vervollständigen:

$$dH = d'Q + Vdp \Rightarrow dH_p = d'Q$$

Der erste Hauptsatz kann also nun auch als Enthalpie geschrieben werden:

$$dH = d'Q + Vdp$$

**isotherme Volumenänderung** ( $T = \text{const}$ ,  $dT = 0$ ): Wenn die Temperatur konstant bleibt, so muss auch die innere Energie konstant bleiben. Dies schließt sich aus der kalorischen Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$U = \frac{f}{2}nRT = U(T) \Rightarrow (dU)_T = 0$$

Da  $U$  von der Temperatur  $T$  abhängt, muss  $U$  also ebenfalls zu null werden: Der erste Hauptsatz besagt daher:

$$dU = d'Q + d'W = 0 \Rightarrow d'Q = -d'W$$

Die Volumenarbeit wandelt sich vollständig in Wärme um und Wärme wandelt sich vollständig in Arbeit um. Dies gilt nur für ideale Gase. Der Isotherme Prozess erzeugt also Arbeit. Hierfür wird das  $p$  mittels der Thermischen Gasgleichung des idealen Gas eingesetzt:

$$\Delta W = -\Delta Q = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Delta W = nRT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Durch das Gesetz vom Boyle-Mariotte welches besagt, dass  $V \propto \frac{1}{p}$  ist, kann  $V$  durch  $p$  ersetzt werden. Dies geschieht unter der Annahme, dass  $pV = \text{const}$  sein muss da ebenfalls  $T$  konstant ist:

$$\Delta W = nRT \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$$

**Adiabatische Prozesse** ( $d'Q = 0$ ): Bei den adiabatischen Prozessen gibt es keinen Wärmeaustausch mit der Umgebung, somit ist  $d'Q = 0$ . Über den ersten Hauptsatz kann nun Hergeleitet werden:

$$dU = d'Q + d'W \Rightarrow dU = d'W$$

Wir wissen bereits, dass  $dU = C_V dT$  ist, sowie das  $d'W = -pdV$  ist. Daher schreiben wir nun an:

$$dU = C_V dT = -pdV$$

Aus der idealen Gasgleichung können wir nun wieder  $p$  ausdrücken und einsetzen:

$$C_V dT = -pdV = -\frac{nRT}{V} dV$$

Es erfolgt nun die Trennung der Variablen mit anschließendem Integrieren beider Seiten:

$$C_V \frac{dT}{T} = -nR \frac{dV}{V} \Rightarrow C_V \cdot \ln T = -nR \cdot \ln V$$

Durch finale Umformungsschritte und auflösen des Logarithmus mittels  $e$  Funktion folgt:

$$TV^{\frac{nR}{C_V}} = const$$

Es wird nun der Adiabatenindex für ideale Gase eingeführt:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} \Rightarrow \text{für iG: } C_p - C_V = nR$$

$$TV^{\frac{C_p - C_V}{C_V}} = const \Rightarrow TV^{\kappa - 1} = const$$

Dies kann auch mittels  $T = \frac{pV}{nR}$  geschrieben werden:

$$pV^\kappa = const$$

Die Adiabatische Arbeit kann nun also über  $pV$  und über  $T$  ausgedrückt werden:

$$\Delta W_{ad} = \frac{1}{\kappa - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$\Delta W_{ad} = \frac{nR}{\kappa - 1} (T_2 - T_1)$$

Bei einer Adiabatischen Zustandsänderung ändern sich alle drei Parameter  $p$ ,  $V$  und  $T$ . Für die Temperaturänderung bei adiabatischer Kompression kann dann folgende Formel angewendet werden:

$$TV^{\kappa - 1} = const \Rightarrow T_0 V_0^{\kappa - 1} = TV^{\kappa - 1}$$

Dabei entspricht  $\kappa = \frac{f+2}{f}$ . (1-atomig:  $f = 3$ , 2-atomig:  $f = 5$ , 3-atomig-starr:  $f = 6$ , 3-atomig-nicht-starr:  $f = 7$ )

#### 4.9.6 2. Hauptsatz

Der zweite Hauptsatz hat mehrere Definitionen:

- **Thomson:** Es ist unmöglich eine periodisch wirkende Maschine zu konstruieren, die nichts anderes bewirkt, als die Umwandlung von Wärme in Arbeit. (Unmöglichkeit eines perpetuum mobile 2. Art)
- **Clausius:** Es ist unmöglich, dass Wärme von selbst (d.h. in einem abgeschlossenen System) aus einem kälteren auf einen heißeren Körper übergeht.

Diese beiden Definitionen sind Äquivalente Formulierungen. Falls eine der beiden zutrifft, trifft die andere ebenfalls zu. Die Kernaussage dabei ist, dass die Wärme  $Q_H$  aus einem Wärmereservoir nicht vollständig (zu 100%) in Arbeit  $W$  umgewandelt werden kann. Die Energie  $Q_H$  wird vom Wärmereservoir bei einer hohen Temperatur  $T_H$  an eine Arbeitssubstanz übertragen. Diese Energie wird dann von dieser Arbeitssubstanz als Wärme  $Q_N$  an ein Reservoir mit niedrigerer Temperatur  $T_N$  übertragen. Bei diesem Vorgang erzeugt die Maschine Arbeit:

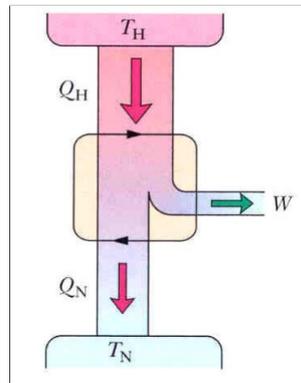


Abb. 68: normale Wärmekraftmaschine

#### 4.9.7 Carnotsche Kreisprozess

Der Carnotsche Kreisprozess beschreibt diesen Vorgang im Detail. Hierbei wird Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt. Dabei durchläuft das Thermodynamische-System verschiedene Zustände und kehrt zu seinem Anfangszustand zurück (= Kreisprozess). Der Carnot-Kreisprozess hat vier Stufen und besteht aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten.

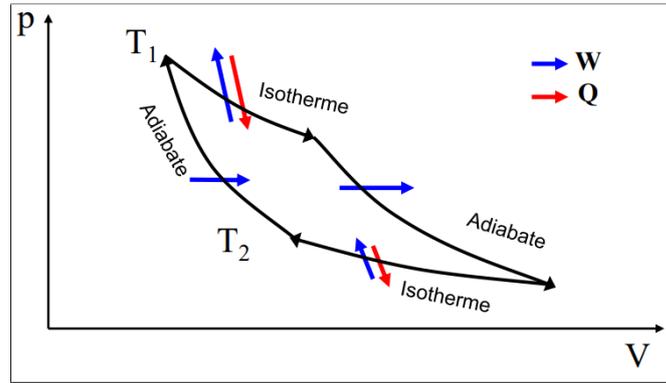


Abb. 69: Carnot-Kreisprozess

Der isotherme Prozess hat hierbei die Bedingung, dass  $T = const$ . Aus den zuvor hergeleiteten Formeln für isotherme Prozesse kann dann die Arbeit oder die Wärmeenergie berechnet werden:

$$\Delta W = -\Delta Q = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Genau so kann der adiabatische Prozess aufgestellt werden. Hierbei ist  $\Delta'Q = 0$ . Als Formel für die Arbeit entspricht dies:

$$\Delta W_{ad} = \frac{nR}{\kappa - 1} (T_2 - T_1)$$

Im p-V Diagramm entspricht die Arbeit der Fläche unter der Prozesslinie. So können also alle Schritte des Prozesses aufgestellt werden und dann voneinander abgezogen werden um nur die Fläche zu erhalten:

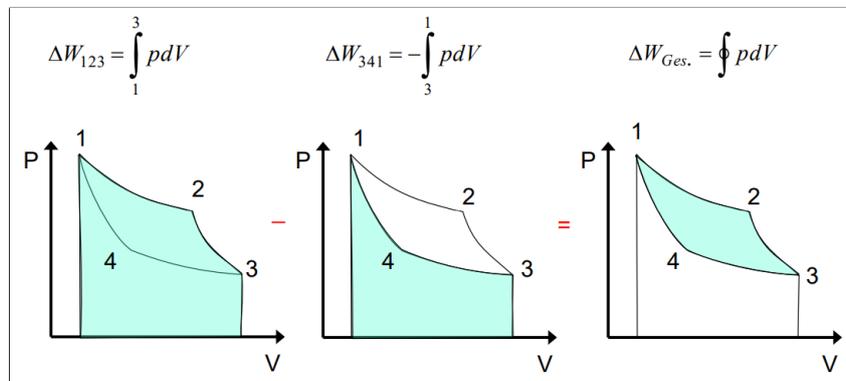


Abb. 70: Carnot-Kreisprozess Arbeit

Über die Isotherme können schließlich die Carnotsche Proportionen aufgestellt werden. Dabei geht man von der Wärmeenergie des Isothermen Prozesses aus:

$$\Delta Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Hierbei wird  $T$  auf eine Seite gebracht. Anschließend kann die selbe Gleichung für  $Q_{34}$  aufgestellt werden:

$$\frac{\Delta Q_{12}}{T_1} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{\Delta Q_{34}}{T_2} = -nR \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Diese beiden Terme können addiert werden, so dass sie sich auf null ergänzen. Durch Umformung erhält man dann die Carnotsche Proportion:

$$\frac{\Delta Q_{12}}{T_1} + \frac{\Delta Q_{34}}{T_2} = 0$$

$$\frac{|\Delta Q_{12}|}{T_1} = \frac{|\Delta Q_{34}|}{T_2} \Leftrightarrow \frac{\Delta Q_{34}}{\Delta Q_{12}} = -\frac{T_2}{T_1}$$

Der Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine kann somit ebenfalls berechnet werden. Dabei ist der Wirkungsgrad  $\eta = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}}$ :

$$\eta = \frac{\Delta Q_{12} - \Delta Q_{34}}{\Delta Q_{12}}$$

Es ist zu beachten, dass nicht die gesamte Wärme  $Q_{12}$  in Arbeit umgewandelt wird. Nur ein Teil  $\Delta W$ , weshalb  $\eta < 1$  sein muss. Die restliche Wärme wird bei  $\Delta Q_{34}$  als Abwärme an ein Kühlreservoir abgegeben.

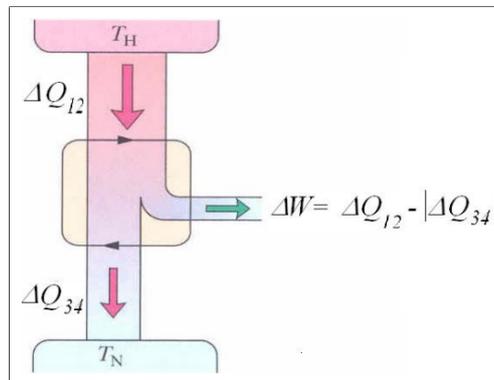


Abb. 71: Wirkungsgrad WKM

Der Wirkungsgrad kann auch noch über die Temperatur definiert werden:

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_{12}} = \frac{|\Delta W_{12} + \Delta W_{34}|}{\Delta Q_{12}} = \frac{\Delta Q_{12} + \Delta Q_{34}}{\Delta Q_{12}} = 1 + \frac{\Delta Q_{34}}{\Delta Q_{12}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Diese Umwandlung erfolgt über die Carnotsche Proportionen. Der Wirkungsgrad hängt also nur von der Temperatur der beiden Wärmereservoirs ab. Um den Wirkungsgrad

allgemein zu erhöhen, kann einfach eine hohe Temperaturdifferenz wie man anhand der Gleichung:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

sehen kann, gewählt werden ( $T_1$  möglichst hoch,  $T_2$  möglichst niedrig).

Die Carnotsche Wärmekraftmaschine ist reversibel. Das bedeutet, in jedem Moment kann die Maschine angehalten und mit Umkehrung der Vorgänge neu gestartet werden. Wenn die Wärmekraftmaschine umgekehrt wurde, dann arbeitet diese als Wärmepumpe (Arbeit wird reingesteckt um mit einer Kälteren Substanz Wärme zu transportieren).

Eine isolierte WKM kommt zum Stillstand, da die Temperaturdifferenz  $T_1 - T_2$  zu null wird (thermisches Gleichgewicht). Um diese WKM aufrecht zu halten, kann in dem abgeschlossenen System eine Wärmepumpe hinzugefügt werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass beide Maschinen den selben Wirkungsgrad aufweisen, da diese beide reversibel sind. Dies würde ansonsten mit dem Prinzip von Clausius in Widerspruch stehen. Nur bei irreversiblen Kraftmaschinen würde der Wirkungsgrad kleiner sein als für den Wirkungsgrad von Carnot Kreisprozessen.

#### 4.9.8 Entropie

Die Entropie spielt bei Kreisprozessen eine wichtige Rolle. Sie wird über die Carnotsche Proportion hergeleitet. Dabei kann ein Prozess der im isothermen Zustand ist über die Änderung der Wärmeenergie abhängig von der Temperatur beschrieben werden:

$$\frac{\Delta Q_{12}}{T_1} + \frac{\Delta Q_{34}}{T_2} = 0$$

Dies würde einen Kreisprozess darstellen. Wir wissen, dass das Ergebnis immer null sein muss. Nun kann ein infinitesimaler Kreisprozess betrachtet werden, der mit gleicher Formel aufgestellt werden kann:

$$\frac{d'Q_{12}}{T_1} + \frac{d'Q_{34}}{T_2} = 0$$

In Anbetracht dieser Aussage, kann der gesamte Kreisprozess als Kreisintegral dargestellt werden:

$$\oint \frac{d'Q}{T} = 0$$

Zu diesem totalem Differential existiert eine Zustandsgröße die ebenfalls ein totales Differential ist:

$$dS = \frac{d'Q_{rev}}{T}$$

Dies ist die Entropie die nun auch als  $\oint dS = 0$  geschrieben werden kann.

Über die Entropie kann nun der Erste Hauptsatz erneut umgeschrieben werden. Die Entropie ist definiert als:

$$dS = \frac{d'Q}{T}$$

Wenn nun  $d'Q$  über Umformung zu  $TdS$  geschrieben wird, so kann der erste Hauptsatz neu definiert werden:

$$dU = d'Q + d'W = d'Q - pdV = TdS - pdV$$

Dies beschreibt nun die Fundamentalgleichung für reversible Prozesse.

Nun kann die Änderung der Entropie für reversible Prozesse durch die Fundamentalgleichung beschrieben werden. Wir formen auf  $dS$  um:

$$dS = \frac{dU + pdV}{T}$$

Durch einsetzen von  $dU = C_v dT$  und  $p = \frac{RT}{V}$  bei einem Mol kann nun umgeschrieben werden auf:

$$dS = \frac{C_v dT + \frac{RT}{V} dV}{T} = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Durch integration erhalten wir nun die Änderung der Entropie für reversible Prozesse:

$$\Delta S = C_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Dadurch kann das T-S Diagramm geschrieben werden, welches die Aufnahme/Abgabe von Wärme darstellt. Dabei ist die gelbe Fläche  $\Delta Q_{ges}$  und entspricht der gleichen roten Fläche  $\Delta W$  des p-V Diagramms:

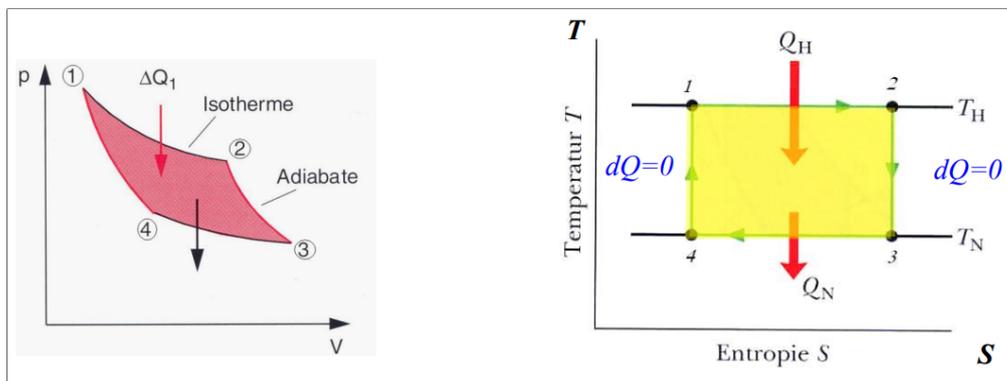


Abb. 72: Arbeitsdiagramm, Wärmediagramm

Konkret beschreibt die Entropie die Unordnung innerhalb eines Systems. Dabei ist bei reversiblen Prozessen die Entropie immer  $dS = 0$  da hier das System wieder zu seiner Ausgangslage kommt. Hingegen zur irreversiblen Prozessen bei denen die Entropie immer zunehmen muss und somit  $dS > 0$  ist. Daher muss bei allen Prozessen in abgeschlossenen Systemen die Entropie zunehmen oder konstant bleiben. Somit ergibt sich auch die Formulierung des 2. Hauptsatzes über die Entropie:

$$\Delta S \geq 0$$

Die Entropie kann auch mittels statistischer Deutung verstanden werden. Dabei wird versucht ein Molekül in einem Volumen  $V_1$  zu finden. Durch die Expansion dieses Volumens sinkt die Wahrscheinlichkeit dieses Molekül aufzusuchen. Ludwig Boltzmann hat hierfür die Absolute Entropie definiert:

$$S = k_b \cdot \ln W$$

Dabei entspricht  $W$  der Mikrozustände die es geben kann.

### 4.9.9 3. Hauptsatz

Die Entropie ist nur bis auf die willkürliche Konstante  $S_0$  festgelegt:

$$dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow S = \int_0^T \frac{dQ}{T} + S_0$$

$S_0$  ist dabei die Entropie bei  $T = 0$ . Der 3. Hauptsatz besagt, dass die Entropie aller reinen kondensierten Stoffe für  $T \rightarrow 0$  dem selben Grenzwert 0 zustreben muss:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$$

Die statistische Deutung des 3. Hauptsatzes sagt folgendes aus:

$$S = k_B \ln W$$

Dadurch kann folgende Aussage getroffen werden: Der thermodynamische Gleichgewichtszustand am absoluten Nullpunkt ist ein Zustand der maximalen Ordnung, der nur eine Realisierungsmöglichkeit  $W = 1$  hat. Der 3. Hauptsatz besagt nun: Es ist prinzipiell unmöglich, den absoluten Temperaturnullpunkt zu erreichen. Man kann ihm zwar näher kommen, aber ihn niemals erreichen.

## 4.10 Gibbsche Phasenregel

Allgemein gibt es die drei Aggregatzustände gasförmig, flüssig und fest. Dabei gibt die Gibbsche Phasenregel an, wie viele Zustandsvariablen  $f$  unabhängig (willkürlich) variiert werden können, ohne die Zahl der koexistierenden Phasen zu ändern.  $f$  ist dabei der thermodynamische Freiheitsgrad und als intensiver Parameter (wie Druck und Temperatur) definiert.

## 4.11 Thermodynamik realer Gase

Ideale Gase vernachlässigen die Wechselwirkungen und das Volumen. Bei realen Gasen jedoch gibt es Anziehungs-, Abstoßungskräfte und Molekülvolumen. Die ideale Gasgleichung kommt realen Gasen am nächsten bei kleinen Drücken und hohen Temperaturen. Über die Van-der-Waals Gleichung können reale Gase angenähert werden.

## 4.12 Van-der-Waalsche Zustandsgleichung

Zuerst wird versucht eine Korrektur an dem Volumen  $V$  einzuräumen. Dabei berücksichtigt man das nicht-zugängliche Volumen eines Atoms. Konkret bedeutet das, dass zwei Atome sich nicht näher kommen können als  $2 \cdot r$  da diese sonst mit ihrem Volumen überlappen würden. Als Volumen betrachtet ergibt dies:

$$V_{verb} = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8r^3 = 8V_a$$

Für  $N$  Teilchen in einem System kann man dieses Volumen als folgendes bestimmen:

$$V_N = V - 4NV_a = V - b$$

Dabei muss  $N \gg 1$  sein.

Die nächste Korrektur wird am Druck vorgenommen. Da sich im inneren die resultierende Kräfte aufheben können diese ignoriert werden. Wenn nun allerdings das Gas an einer Grenzfläche mit Flüssigkeit oder einem Festkörper ist, dann treten Binnenkräfte  $F_A$  auf. Dabei ist die Binnenkraft proportional zu der Dichte der anziehenden Atome in der Halbkugel und der Dichte der Atome in der Festkörpernenahen Schicht:

$$F_A \propto \frac{N}{V} \cdot \frac{N}{V} \propto \frac{1}{V^2}$$

Der Binnendruck wirkt mit  $p_B = \frac{a}{V^2}$  zusätzlich zum äußeren Druck  $p$ . Dabei ist  $a$  eine Materialkonstante die abhängig von der individuellen Wechselwirkung ist.

Mit diesen beiden Korrekturen kann die Van-der-Waals Gleichung als folgende geschrieben werden (für 1 Mol):

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT$$

Dabei ist  $b$  das 4-Fache Eigenvolumen  $4N_A V_a$ . Die Bestimmung von beiden Konstanten  $a$  und  $b$  muss empirisch erfolgen und kann nicht hergeleitet werden. Die Konstante  $b$  variiert dabei nur wenig und hält sich im Bereich um den Faktor 2 auf.  $a$  hingegen variiert sehr stark um einen Faktor von etwa 150. Die Van-der-Waals Gleichung weist einen Kubischen Charakter in Bezug auf  $V$  auf und kann daher maximal in drei Punkten beschrieben werden wenn eine Parallele zur  $V$ -Achse gezogen wird. Die Kurve die dadurch entsteht wird oft Van-der-Waals isotherme genannt. Aus der Van-der-Waals Gleichung können Kritische Parameter definiert werden. So definiert man die kritische Temperatur, Druck und Volumen folgendermaßen:

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2}$$

$$V_k = 3b$$

Der Quotient aller Gase sollte dementsprechend auch gleich sein:

$$s = \frac{p_k V_k}{RT_k} = \frac{a \cdot 3b \cdot 27Rb}{27b^2 \cdot R \cdot 8a} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Die Kalorische Zustandsgleichung ergibt sich dann auch nach Van-der-Waals zu:

$$E_{kin} = \frac{f}{2} NkT = \frac{f}{2} RT$$
$$E_{pot} = \int_{\infty}^V p_{Bin} dV = \int_{\infty}^V \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{V}$$

Dabei ist  $E_{kin}$  ident wie bei idealen Gasen, wobei  $E_{pot}$  bei idealen Gasen 0 wäre. Die Kalorische Zustandsgleichung für Van-der-Waalssches Gas ergibt sich dann zu:

$$U = E_{kin} + E_{pot} = \frac{f}{2} RT - \frac{a}{V}$$