

1. Elektrostatik

Coulomb, E-Feld, E-Fluss, Potential

- ① Zeigen Sie, dass das Coulombgesetz aus dem Gauß'schem Gesetz hergeleitet werden kann.
 a) Beschreiben Sie kurz die Aussagen des Gauß'schen Gesetzes der Elektrostatik.
 b) Ausgehend vom Coulomb Gesetz zeigen Sie, dass das Gauß'sche Gesetz nicht nur für eine Kugeloberfläche, sondern auch für jede beliebige geschlossene Oberfläche gilt.

Gauß'scher Satz: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \Phi = \int_V \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV$

Coulomb Gesetz ableiten: Punktladung q kann von einer Gauß'schen Fläche in Form einer Kugeloberfläche umschlossen werden

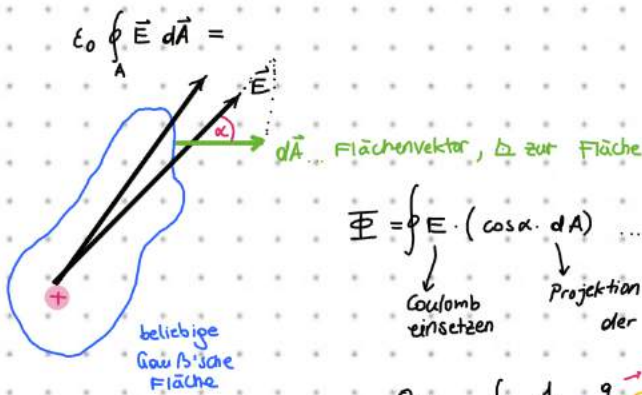
$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

- a) Gesamtfluss durch geschlossene Oberfläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung Q_{enc} ($\Rightarrow F = E \cdot q \Rightarrow F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$)
 (Fluss entspricht Feldliniendichte?)

$\Phi = 0$: Volumen ohne Quelle oder Senke
 $\Phi > 0$: Quelle vorhanden
 $\Phi < 0$: Senke vorhanden

Gauß'sche Fläche muss umschließend sein + sonst frei wählbar

b) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{1}$ für Kugeloberfläche

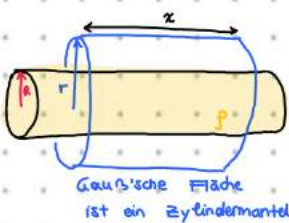


$\Phi = \oint \vec{E} \cdot (\cos \alpha \cdot dA)$... allg. elektrischer Fluss
 Coulomb einsetzen Projektion in die Richtung der Feldlinien

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \oint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \cos \alpha \, dA \Rightarrow Q_{enc} = \oint_A \frac{1}{4\pi} \cdot Q_{enc} \cdot d\Omega = \frac{4\pi}{4\pi} Q_{enc} = Q_{enc}$$

↓
Raumwinkel über geschlossene Fläche = 4π
 ✓ passt auch für bel. geschlossene Flächen

- ② Berechnen Sie das elektrische Feld und das Potential eines unendlich langen, homogen geladenen Stabes mit Radius R und Ladungsdichte ρ (Volumendichte):
 a) im Innenraum
 b) im Außenraum
 c) Skizzieren Sie das Feld und das Potential (kurze Begründung)
 d) Diskutieren Sie die Symmetriebedingungen für die Feldkonfiguration



∞ lang! \rightarrow Position in horizontaler Richtung irrelevant
 \rightarrow Seitenflächen mit $\Phi = 0$ da $\vec{E} \perp d\vec{A}$ mit $\cos(\pi/2) = 0$
 \rightarrow Fluss nur durch Mantel $\Phi \neq 0$
 \rightarrow \vec{E} radial nach außen (Richtung bekannt, nur Betrag berechnen)

a) $r < R$

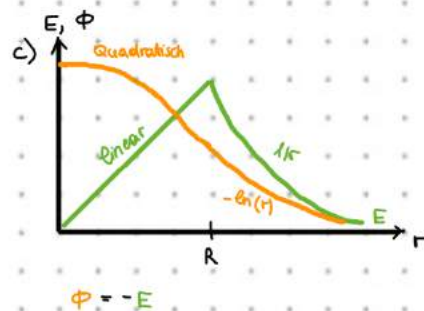
$\rho = \frac{Q}{V}$
 $A = 2\pi r \cdot x$
 $Q_{enc} = \rho \cdot V_{enc} = \rho \cdot r^2 \pi \cdot x$

Gauß: $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = E \cdot A$
 $E = \frac{\rho \cdot r^2 \pi \cdot x}{\epsilon_0 \cdot 2\pi r \cdot x} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r$

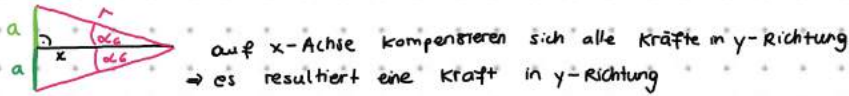
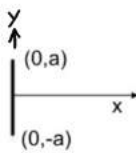
b) $r > R$

$\rho = \frac{Q}{V}$
 $A = 2\pi r \cdot x$
 $Q_{enc} = \rho \cdot V_{enc} = \rho \cdot R^2 \pi \cdot x$

Gauß: $E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0 \cdot A}$
 $E = \frac{\rho \cdot R^2 \pi \cdot x}{\epsilon_0 \cdot 2\pi r \cdot x}$
 $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r}$



- 3) Ein dünner geladener Stab (Linienladungsdichte λ [C/m]) der Länge $2a$ befindet sich symmetrisch zum Koordinatenursprung parallel zu y-Achse (Bild). Bestimmen Sie das elektrische Feld entlang der x-Achse (Symmetrieachse).



α_a ... größter Winkel

$$\alpha_a = \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

→ von 0 bis α_a den Einfluss integrieren und mal 2 nehmen

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$r(\alpha) = \frac{x}{\cos \alpha}$$



$$\sin d\alpha = d\alpha = \frac{dl}{r} \Rightarrow dl = r \cdot d\alpha = \frac{x}{\cos \alpha} \cdot d\alpha$$

Linienladungsdichte: $\lambda = \frac{Q}{L}$

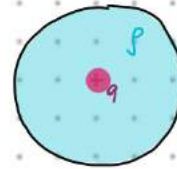
$$dQ = \lambda \cdot dl$$

Coulomb:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl \cdot \cos \alpha}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{x}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha}{x^2} d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} d\alpha$$

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \hat{e}_x \cdot 2 \cdot \int_0^{\alpha_a} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \arctan\left(\frac{a}{x}\right) \cdot \hat{e}_x$$

- 4) Thomsonsches Atommodell. Eine negative Ladung $-q$ ist homogen über das Volumen einer Kugel mit Radius R verteilt. In der Mitte der Kugel befindet sich außerdem eine positive punktförmige Ladung $+q$.



$$\rho = \frac{-q}{V_{\text{Kugel}}} = -\frac{3q}{4\pi R^3}$$

- a) Berechnen Sie das elektrische Feld und das Potenzial des Systems im gesamten Raum.
b) Berechnen Sie die (Bindungs-)Energie dieses Atoms.

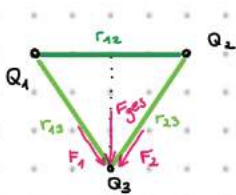
- (a) 1) $r \geq R$: $E = 0$ ($Q_{\text{enc}} = q - q = 0$)
2) $r < R$: $Q_{\text{enc}} = q + \int \frac{4\pi r^2}{3} \rho$, $A = 4\pi r^2$

Gauß: $E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{q - \frac{3q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{q \cdot \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$ Richtung: radial nach außen

- (b) Bindungsenergie: -Ionisierungsenergie \Rightarrow \ominus ganz entfernen

$$W = \int_R^{\infty} \underline{E} \cdot (-q) dr = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right) dr = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{R^3}\right) \Big|_R^{\infty} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R} - \left(-\frac{2}{R}\right)\right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow \text{Bindungsenergie}$$

- 5) Berechnen Sie die potentielle Energie von drei Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 , die sich im Abstand r_{12} , r_{13} bzw. r_{23} befinden. Geben sie die Gesamtkraft auf die Ladung Q_3 an und zeichnen sie schematisch die Überlagerung der Kräfte zur Gesamtkraft auf die Ladung Q_3 .



$$\Phi_{\text{ges}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_2}{r_{23}} + \frac{Q_1}{r_{13}}\right)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_1}{r_{12}}\right)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}}\right)$$

$$E_{\text{pot}} = \Phi_{\text{ges}} \cdot Q_3$$

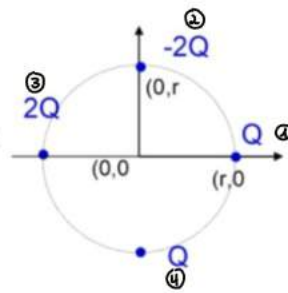
$$E_{\text{pot}3} = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_2}{r_{23}} + \frac{Q_1}{r_{13}}\right)$$

$$E_{\text{pot}2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_1}{r_{12}}\right)$$

$$E_{\text{pot}1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}}\right)$$

Kraft auf Q_3 : $\vec{F}_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r_{13}^2} \vec{r}_{13} + \frac{Q_2}{r_{23}^2} \vec{r}_{23}\right)$

- 6) Geben sie das Potential und das elektrische Feld im Mittelpunkt eines Kreises mit Radius r an, wenn die Ladungen Q , $-2Q$, $2Q$ und Q bei den Koordinaten $(r,0)$, $(0,r)$, $(-r,0)$ und $(0,-r)$ angeordnet sind.



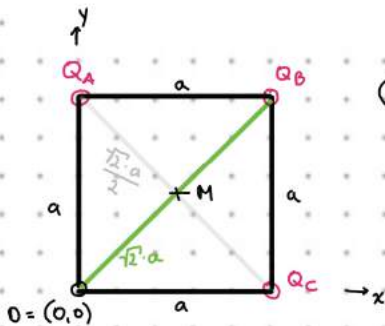
Abstand überall r , die Einheitsvektoren sind $\hat{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{r}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\hat{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\hat{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

damit: $\vec{E}_{ges} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (Q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2Q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2Q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + Q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$E_{ges} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \sqrt{4} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi_{ges} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

- 7) In drei Ecken (A,B,C) eines Quadrats ABCD mit der Seitenlänge a befinden sich drei gleiche Ladungen $+Q$. Finden Sie das elektrische Feld und das Potential im Punkt D sowie in der Mitte des Quadrats.



Ⓐ $\vec{E}_{ges} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1/a^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2a^2 \\ 1/2a^2 \end{pmatrix} \right) =$
 $= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} 3/2a^2 \\ 3/2a^2 \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{8} \cdot \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_{ges} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

$$\phi_{ges} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 \pi a^3}$$

Ⓑ $\vec{E}_{ges} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{4}{2a^2} \cdot \begin{pmatrix} a/2 \\ -a/2 \end{pmatrix} + \frac{4}{2a^2} \cdot \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \end{pmatrix} + \frac{4}{2a^2} \cdot \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \end{pmatrix} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_{ges} = \frac{\sqrt{2} \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

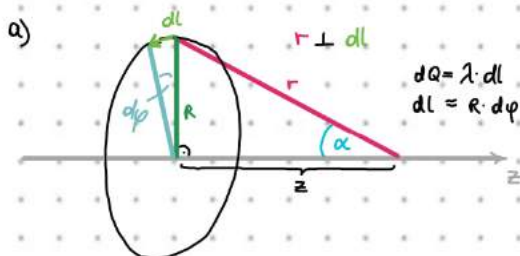
$$\phi_{ges} = \frac{\sqrt{2} \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

- 8) Ein Ring aus dünnem Draht mit Radius R ist homogen geladen mit Linienladung λ .

a) Berechnen Sie das elektrische Feld entlang der Symmetrieachse (z-Achse).

b) Besprechen Sie explizit die Symmetriebedingungen für das Feld.

c) Berechnen Sie zwei ersten Terme der Taylorreihe in $1/z$ in der Entwicklung $E(1/z)$ für $z \gg R$.



$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot R \cdot d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{R^2 + z^2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{R^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{R^2 + z^2} \cdot \hat{e}_z$$

b) Beiträge in x-y-Richtung kürzen sich \rightarrow nur in z-Richtung ein Feld

c) $z \gg R$

$$\vec{E}(z) \approx \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \hat{e}_z$$

Taylorpolynom von $\frac{1}{z^2}$: $T_2 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''}{2!} \cdot (x - x_0)^2$

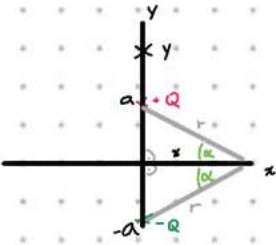
mit $x_0 = \frac{1}{z}$

$$T_1 = \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{\left(\frac{1}{z}\right)^3} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right) = z^2 - 2z^4 + 2z^2 = z^2 \cdot (3 - 2z^2)$$

$$\vec{E}(z) \approx \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \cdot z^2 \cdot (3 - 2z^2)$$

9) Zwei Ladungen befinden sich auf der (x,y) Ebene: Erste Ladung Q, Koordinaten (0, a); Zweite Ladung -Q, Koordinaten (0, -a).

- a) Berechnen Sie das elektrische Feld entlang der x-Achse:
 a1) Graphisch (Amplitude und Richtung) a2) Koordinatenweise
 b) Berechnen Sie das Potential dieses Dipols entlang der y-Achse in der Näherung $|y| \gg a$. (Ersten von Null abweichenden Term in der Reihenentwicklung in $1/y$).



(a) $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right] = 0$ -influss gleicht sich gerade aus)

$E(r) = -\text{grad } \phi = 0$

(b) Abstand zu +Q: $y - a$
 Abstand zu -Q: $y + a$

$\phi(y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(y-a) - (y+a)}{y^2 - a^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2a}{y^2 - a^2} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{y^2}$

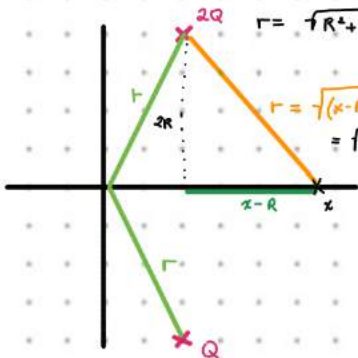
Taylorpolynom von $\frac{1}{y^2}$:
 mit $x_0 = \frac{1}{y}$

$T_2 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$

$T_2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(-\frac{2}{y^3}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{y}\right) + \frac{6}{2!} \cdot \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = y^2 - 2y^0 + 2y^2 = y^2 \cdot (3 - 2y^2)$

$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot y^2 \cdot (3 - 2y^2)$

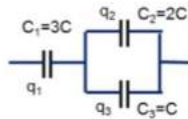
10) a) Geben Sie das elektrische Feld im Koordinatenursprung (0,0) für ein System aus zwei Ladungen an: 1. Ladung 2Q, Koordinaten (R, 2R); 2. Ladung Q, Koordinaten (-2R, R).
 b) Berechnen Sie das elektrische Potential entlang der x-Achse: (x, 0).



(a) $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{(\sqrt{5R^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 2R \end{pmatrix} + \frac{1}{(\sqrt{5R^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} -2R \\ R \end{pmatrix} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{5R^2 \cdot R \cdot \sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5\sqrt{5}R^3} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
 $= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{5\sqrt{5}R^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Q}{10\sqrt{5}\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 2xR + 5R^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xR + 5R^2}} \right) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xR + 5R^2}}$

11) Drei Kondensatoren sind angeordnet wie in der Abbildung. Das System ist an einer Batterie der Spannung U angeschlossen. Berechnen Sie die Ladungen an allen Kondensatoren (q1, q2, q3).



$C_{23} = 3C \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = U/2 \\ U_2 = U/2 \end{array} \right.$

$q_1 = 3C \cdot U/2 = \frac{3}{2} C \cdot U$

$q_2 = 2C \cdot U/2 = C \cdot U$

$q_3 = C \cdot U/2 = \frac{1}{2} C \cdot U$

$Q = C \cdot U$

$[C] = 1 \frac{C}{V} \hat{=} 1 \text{ Farad}$

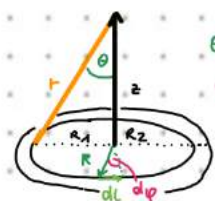
parallel: $C_{11} = \sum_i C_i$

in Serie: $\frac{1}{C_s} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad \text{od.} \quad C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

damit: C_2, C_3 auf Spannung U_{23} } $U_1 + U_{23} = U \rightarrow$ Spannungsteiler
 C_1 auf Spannung U_1

11) Elektrostatistisches Feld eines geladenen Rings (Flächenladungsdichte σ ; alternativ: Raumladungsdichte ρ ; Linienladungsdichte λ) mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 in der xy-Ebene konzentrisch um den Ursprung. (genauso Scheibe/Platte/Hohl-/Vollkugel/Stab/Hohl-/Vollzylinder, etc.)

- a) Skizzieren Sie die Anordnung.
 b) Wie groß ist das elektrische Feld im Ursprung?
 c) Berechnen Sie das elektrische Feld in einem Abstand h entlang der z-Achse.



θ von $\arctan\left(\frac{R_1}{z}\right)$ bis $\arctan\left(\frac{R_2}{z}\right)$

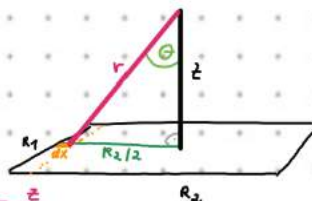
φ von 0 bis 2π

$dQ = \sigma \cdot dl \cdot dx = \sigma \cdot R \cdot \frac{z}{\cos\theta} d\theta d\varphi$

$r = \frac{z}{\cos\theta}$

$dx = r \cdot d\theta = \frac{z}{\cos^2\theta} d\theta$

Scheibe ohne Loch analog ($R_1 = 0$)



$r = \frac{z}{\cos\theta}$

$dx = r \cdot d\theta = \frac{z}{\cos^2\theta} d\theta$

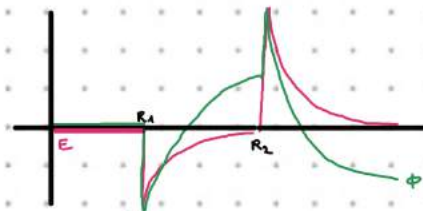
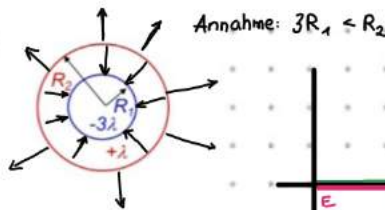
$dQ = \sigma \cdot R_1 \cdot dx = \sigma \cdot \frac{R_1 z}{\cos^2\theta} d\theta$

θ von $-\arctan\left(\frac{R_1}{z}\right)$ bis $\arctan\left(\frac{R_2}{z}\right)$

Stab ganz ähnlich nur anderes dQ

Kugeln und Zylinder mit Gauß.

- 12) Zylinderkondensator. Gegeben sind zwei koaxiale, unendlich lange, dünnwandige und geladene Metallzylinder der Radien R_1 (Ladungsdichte -3λ [C/m]) und $R_2 > R_1$ (Ladungsdichte $+\lambda$ [C/m]). Berechnen Sie und zeichnen Sie das elektrische Feld und Potential dieser Ladungsverteilung im gesamten Raum
- Innenbereich
 - Zwischenbereich
 - Außenbereich



∞ lang \rightarrow nur radiale Entfernung relevant!

wieder nicht ganz durchgerechnet \rightarrow nur Skelett \rightarrow alles mit Gauß, Zylindermantel $A = 2\pi r \cdot x$

(a) feldfrei $Q_{enc} = 0$

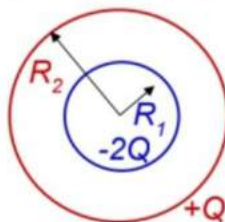
(b) $Q_{enc} = 2\pi R_1 \cdot (-3)\lambda \cdot x = -6\pi R_1 \lambda x$

(c) $Q_{enc} = 2\pi R_2 \cdot \lambda \cdot x - 6\pi R_1 \lambda x = 2\pi \lambda x \cdot (R_2 - 3R_1)$

$$E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0 \cdot A}$$

$$\phi = -\int E$$

- 13) Kugelkondensator. Gegeben sind zwei konzentrische, dünnwandige und geladene Metallkugeln der Radien R_1 (Ladung $-2Q$) und $R_2 > R_1$ (positive Ladung $+Q$).
- Berechnen Sie und zeichnen Sie das elektrische Feld dieser Ladungsverteilung im gesamten Raum (Innenbereich, Außenbereich, Zwischenbereich).
 - Berechnen Sie und zeichnen Sie das elektrische Potential im gesamten Raum.
 - Berechnen Sie die Kapazität eines solchen Kugelkondensators.

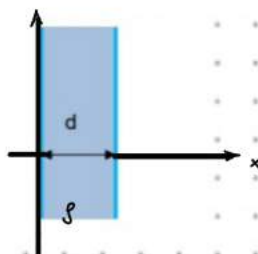


(a) und (b) wie 12)

(c) $C = \frac{Q}{U}$ mit $U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

- 14) Berechnen Sie (im Innenraum und im Außenraum)
- das elektrische Feld
 - den Potentialverlauf
- einer unendlich breiten, homogen geladenen Platte mit Dicke d und Ladungsdichte ρ (Volumendichte):
- Skizzieren Sie das Feld und das Potential
 - Diskutieren Sie die Symmetriebedingungen für die Feldkonfiguration



(a) Gauß'sche Fläche ist eine Quaderoberfläche!

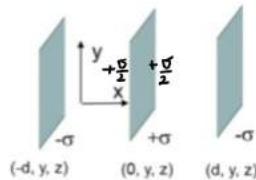
- $x < -d$
 - $x > d$
- Q_{enc} sind dann jeweils Quaderstücke!

(b) $E = -\text{grad } \phi$

(c) wie zuvor

(d) ∞ -Ausdehnung in y - z -Ebene \Rightarrow nur x -Entfernung relevant
 \Rightarrow Gauß wird nur 2 Quaderflächen ohne die Seiten sein!

- 15) Drei zueinander parallele große dünne Ebenen tragen die Oberflächenladungen wie abgebildet. Berechnen Sie und zeichnen Sie das elektrische Feld und das Potential (Potential nur zeichnen) im gesamten Raum.
- (zur Herleitung nur Coulomb + Gauss Gesetze erlaubt)



\rightarrow Vernachlässigen von (y, z) Position, da Platten als groß angenommen werden

\rightarrow nur x -Richtung relevant

\rightarrow genau im Ursprung: 0

$x < -d < 0$: $A = 2 \cdot y \cdot z$

und $Q_{enc} = 2y \cdot z \cdot (-\sigma) + y \cdot z \cdot \sigma = -\sigma \cdot y \cdot z$

$0 < d < x$:

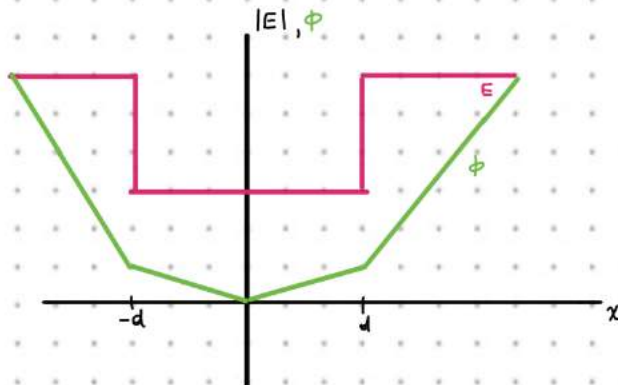
$$E = \frac{Q_{enc}}{A \epsilon_0} = \frac{-\sigma \cdot y \cdot z}{2y \cdot z \cdot \epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \dots \text{wie eine } \ominus \text{ Platte!}$$

$d < x < 0$

bzw. $A = 2y \cdot z$

$0 < x < d$ $Q_{enc} = y \cdot z \cdot \left(+\frac{\sigma}{2}\right) - y \cdot z \cdot \sigma = -\frac{1}{2} \cdot y \cdot z \cdot \sigma$

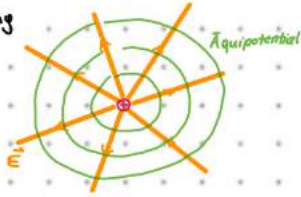
$$E = \frac{Q_{enc}}{A \epsilon_0} = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$



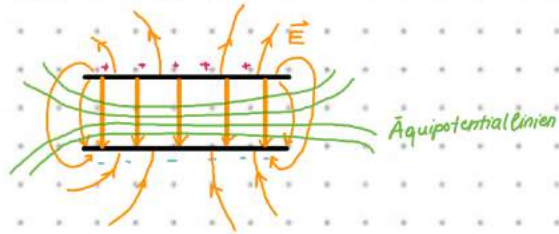
- 16) a) Welche Eigenschaften treffen auf elektrostatische Felder zu: konservativ, quellenfrei, wirbelfrei?
 Wann können elektrische Felder ohne Ladungen existieren? (2 Pt)
 b) Skizzieren Sie elektrische Feldlinien und Äquipotentiallinien eines Plattenkondensators/elektrischen Dipols/Punktladung/geladenen Stabs, etc.

a) E-Felder sind konservativ \Leftrightarrow wirbelfrei, weil durch $\nabla \times \vec{E} = 0$ wegunabhängigkeit überprüft wird
 E-Felder ohne Quellen aber mit Wirbel bei Änderungen der magnetischen Flussdichte

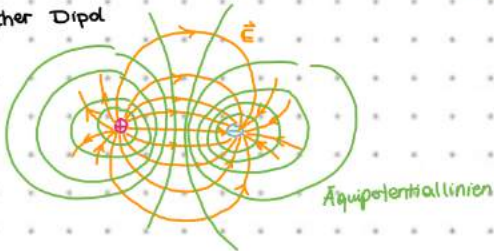
b) Punktladung



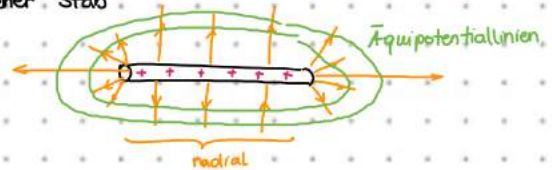
Plattenkondensator



elektrischer Dipol



geladener Stab



- 17) Eine isoliert aufgehängte Metallkugel ($r_1 = R$) wird in Luft solange aufgeladen, bis die Potentialdifferenz zur Umgebung U_0 beträgt.

a) Welche Ladung ist dazu notwendig?

Anschließend wird diese Kugel mit einer zweiten ebenfalls isoliert aufgehängten Metallkugel ($r_2 = R/2$) durch einen feinen Draht kurzzeitig verbunden, sodass sich die Ladung auf beide Körper aufteilen kann.

b) Wie groß sind nun die einzelnen Ladungen und die jeweiligen Potentiale?

(a) $W = U_0$ (Potentialdifferenz)

$$U_0 = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow Q = -4\pi\epsilon_0 \cdot U_0 \cdot R$$

(b) 2. Kugel: \Rightarrow Potential wird so ausgeglichen, dass beide Kugeln auf demselben Potential sind, dabei teilt sich

$$Q_1 = I_{\text{new}} \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot R$$

$$\frac{Q_1}{2} = I_{\text{new}} \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R}{2}$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$3Q_2 = Q = U_0 \cdot 4\pi\epsilon_0 R$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \pi \epsilon_0 U_0 R$$

$$Q_1 = \frac{8}{3} U_0 \pi \epsilon_0 R$$

$$I_{\text{new}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{R} \cdot \frac{4}{3} \pi \epsilon_0 U_0 R$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{8}{3} \pi \epsilon_0 U_0 R = \frac{2}{3} U_0$$

- 18) Warum ist ein statisches elektrisches Feld nicht in der Lage, ein geladenes Teilchen in einem stabilen Gleichgewicht zu halten?

E-Felder haben Quellen bzw. Senken \rightarrow ein geladenes Teilchen bewegt sich entlang oder gegen die Feldlinien (durch Divergenz beschrieben)
 statisch: kein Wirbelfeld

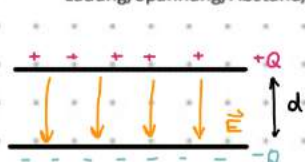
Poisson, Multipole, Leiter im E-Feld, Feldenergie

19) Beschreiben Sie das elektrische Feld und Potential im Inneren sowie an der Oberfläche eines Metalls.

Für Metall = idealer Leiter

- (1) $E = 0$, mit $\text{div } E = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow$ Innenraum ist ladungsfrei \rightarrow Ladungsträger nur an Oberfläche
- (2) statischer Fall mit $\vec{E} \perp$ Oberfläche, weil $\vec{E}_{||}$ Ladungsverschiebungen verursachen würde
 \hookrightarrow Oberfläche ist Äquipotentialfläche
 $\rightarrow \phi = \text{const}$ (zusammenhängende Oberfläche!)
- (3) Potential im Innenraum: $\Delta \phi = 0$
- (4) \vec{E} -Feldlinien sind \perp auf Oberfläche (extern)

20) Elektrostatistisches Potential und Energie eines Kondensators: Änderung von Ladung/Spannung/Abstand/Dielektrikum



Gauss: $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ (Plattenladung / Plattenfläche)

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d E \, dr = E \cdot d \Rightarrow U = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d$$

mit $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} (\cdot \epsilon_r)$

$$W = C \cdot U^2$$

d steigt $\rightarrow C$ nimmt ab \rightarrow Ladung konstant \rightarrow Spannung steigt

Spannung fix (angeschl.) $\rightarrow d$ nimmt zu $\rightarrow C$ nimmt ab \rightarrow speicherbare Ladung nimmt ab

mit einem Dielektrikum steigt die Kapazität \rightarrow bei fixer Spannung steigt die Ladung
 bei fixer Ladung sinkt die Spannung

21) In den Hohlraum einer leitenden Kugel mit der Ladung Q wird in den Mittelpunkt eine Ladung $-q$ eingebracht. Wie groß ist dann die Ladung an der Oberfläche der äußeren Kugel?

- $\rightarrow -q$ zieht genau $+q$ auf Innenseite der äußeren Kugel (da leitend mit beweglichen Ladungsträgern)
- \rightarrow an Oberfläche noch $Q - q$ da!

22) Zeigen Sie, dass im Hohlraum umgeben von einem Metall (keine Kugel!) das elektrische Feld verschwindet (Faradaykäfig).

Metall wird als idealer Leiter betrachtet \Rightarrow externes Feld \rightarrow Ladungsverschiebung im Metall plätt Feld aus

1) Ladungen nur an der Oberfläche

2) Gauss: $\int E \, dA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = 0$, da $E_{\text{Leiterinnerer}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{enc}} \stackrel{!}{=} 0$

(für Leiterfläche)



3) Weg G: $\int E_{\text{Leiter}} \, ds + \int E_{\text{Hohlraum}} \, ds = 0$

$E_{\text{Leiter}} = 0$

$E_{\text{Hohlraum}} \neq 0 \Rightarrow$ geht nicht \Rightarrow Ladung auf Innenseite verschieben sich so lang, bis $E_{\text{Hohlraum}} = 0$!

23) Zeigen Sie, dass an der Spitze eines geladenen Metallgegenstandes das elektrische Feld sehr groß sein kann (Spitzeneffekt).



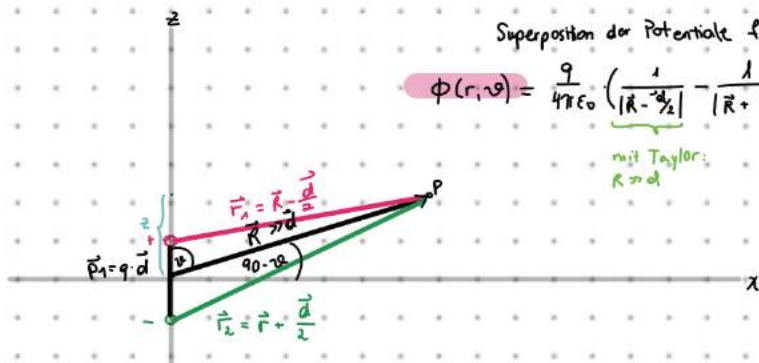
lokale Krümmungsradii \rightarrow betrachten wie 2 Kugel

Metall: $\phi_{\text{Oberfläche}} = \text{const}$, mit $E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot r = \text{const} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \frac{\phi}{r}$

$\Rightarrow E = \frac{\phi}{r} \Rightarrow E$ hängt von lokalem Krümmungsradius ab!

$r \rightarrow 0 \Rightarrow E \rightarrow \infty$! Hohe Feldstärken!

24) Ein elektrischer Dipol mit \vec{p}_1 ||z-Achse befindet sich im Koordinatenursprung. Ausgehend vom Coulomb Gesetz berechnen Sie die potentielle Energie eines zweiten Dipols \vec{p}_2 an, der sich im (großen) Abstand auf der x-Achse befindet und beliebig ausgerichtet ist. Bei welcher Ausrichtung der Dipole zueinander ist die potentielle Energie minimal bzw. maximal?



Superposition der Potentiale für Punkt P:

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{R} - \frac{d}{2}\vec{e}_z|} - \frac{1}{|\vec{R} + \frac{d}{2}\vec{e}_z|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{\vec{R}d}{2R^3} - \frac{1}{R} + \frac{\vec{R}d}{2R^3} \right) = \frac{q \cdot d \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p \cdot R \cdot \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \approx \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Vektor \vec{p} \vec{e}_z , nur senkrechte \downarrow Komp.

$$\frac{1}{|\vec{R} \pm \frac{d}{2}\vec{e}_z|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{R} \pm \frac{d}{2}\vec{e}_z)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 \pm \vec{R}d + \frac{d^2}{4}}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{\vec{R}d}{R^2} + \frac{d^2}{4R^2}}} \stackrel{\text{Taylor } \approx 0}{=} \frac{1}{R} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\vec{R}d}{R^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{R} \pm \frac{\vec{R}d}{2R^3} \quad \text{Taylor: } f \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!}$$

Potential durch ersten Dipol auf x-Achse:

$$\underline{\underline{\phi(r, \vartheta)_x}} = \frac{p \cdot \cos(90^\circ)}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\vec{E}(r, \vartheta)_x}} = \underline{\underline{0}}$$

Zweiter Dipol auf der x-Achse?

$$\vec{E}(r, \vartheta) = -\nabla \phi(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$E_r(r, \vartheta) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \vartheta$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \vartheta$$

$$E_\varphi = 0$$

$\rightarrow x \gg d \Rightarrow \vartheta = 90^\circ \Rightarrow E_r \approx 0$

$$E_\vartheta \approx \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\rightarrow W_{\text{pot}} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E} = -\vec{p}_2 \cdot \left(-\frac{\vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{q^2 \cdot \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$
 $r = x$

- $\rightarrow 0$ für $\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$
- $\rightarrow \text{max}$ für $\vec{d}_1 = \vec{d}_2$
- $\rightarrow \text{min}$ für $\vec{d}_1 = -\vec{d}_2$

25) Ein elektrischer Dipol mit \vec{p} ||z-Achse befindet sich im Koordinatenursprung. Ausgehend vom Coulomb Gesetz leiten Sie das elektrische Potenzial dieses Dipols entlang der:

- X-Achse
- Y-Achse
- Z-Achse

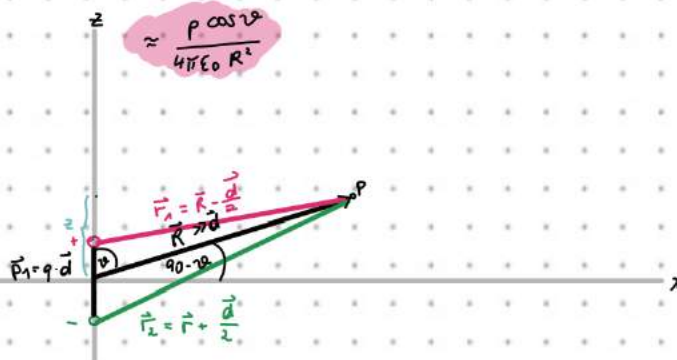
Superposition der Potentiale für Punkt P:

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{R} - \frac{d}{2}\vec{e}_z|} - \frac{1}{|\vec{R} + \frac{d}{2}\vec{e}_z|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{\vec{R}d}{2R^3} - \frac{1}{R} + \frac{\vec{R}d}{2R^3} \right) = \frac{q \cdot d \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p \cdot R \cdot \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \approx \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Vektor \vec{p} \vec{e}_z , nur senkrechte \downarrow Komp.

$$\frac{1}{|\vec{R} \pm \frac{d}{2}\vec{e}_z|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{R} \pm \frac{d}{2}\vec{e}_z)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 \pm \vec{R}d + \frac{d^2}{4}}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{\vec{R}d}{R^2} + \frac{d^2}{4R^2}}} \stackrel{\text{Taylor } \approx 0}{=} \frac{1}{R} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\vec{R}d}{R^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{R} \pm \frac{\vec{R}d}{2R^3} \quad \text{Taylor: } f \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} \dots$$



$$\phi_x = 0$$

$$\phi_y = 0$$

(y-Achse und x-Achse gleicher Gedanke)

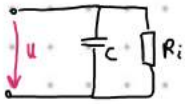
$$\vartheta = 90^\circ$$

$$\phi_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\vartheta = 0^\circ$$

Dielektrika, atomare Grundlagen, Elektrostatik in Natur und Technik

- 26) Ein realer Plattenkondensator (dielektrische Konstante des Dielektrikums ϵ) wird bis zu einer Spannung U geladen und von der Batterie getrennt. Nach einer Zeit τ wird am Kondensator nur die Hälfte der Spannung gemessen. Berechnen Sie den spezifischen Rest-Widerstand des Dielektrikums. Mit kurzer Herleitung, Ladungsverluste über die Kontakte vernachlässigen.



$$U = R \cdot I = RC \cdot \frac{dU}{dt} \Rightarrow U - RC \frac{dU}{dt} = 0 \quad \underline{\text{DGL}}$$

$$U \cdot C = Q \quad \text{with } Q = \int I dt$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dU \cdot C}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U}{RC}$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int \frac{dt}{RC}$$

$$\ln(U) = \frac{t}{RC} + C$$

$$U = U_0 \cdot e^{-t/RC}$$

$$U(\tau) = \frac{U_0}{2} = U_0 \cdot e^{-\tau/RC}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\tau}{RC}$$

$$R = -\frac{\tau}{C} \cdot \ln(2)$$

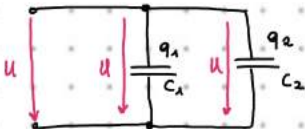
mit $C = \frac{A}{d} \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon$

$$R = \frac{\rho d}{A} \Rightarrow \rho = \frac{R \cdot A}{d}$$

$$R = -\frac{\tau d}{A} \cdot \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \ln(2)$$

$$\rho = \frac{A}{d} \cdot \left(-\frac{\tau d}{A} \cdot \frac{1}{\epsilon \epsilon_0}\right) \ln(2) = -\frac{\tau}{\epsilon_0 \epsilon} \cdot \ln(2)$$

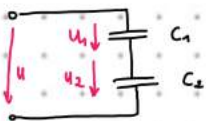
- 27) Leiten Sie explizit die Formel für die Parallel- und Serien-Schaltung von Kondensatoren her.



$$Q_{\text{ges}} = q_1 + q_2$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = C_1 + C_2$$

Für n Kondensatoren \parallel : $C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n C_i$



$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2$$

$$Q = q_1 = q_2 \quad (\text{weil gleicher Strom?})$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{Q}{U_{\text{ges}}} = \frac{Q}{U_1 + U_2} \quad \frac{Q}{U} = C$$

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \text{für n Kondensatoren in Reihe: } \frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

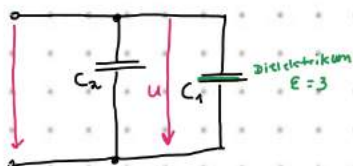
- 28) Die parallel geschalteten Kondensatoren werden von der Batterie getrennt und in einen Kondensator wird ein Dielektrikum mit $\epsilon = 3$ eingebracht (ohne Luftspalt).

1.1) Bestimmen sie a) die Spannung an den beiden Kondensatoren, b) die Ladung auf jedem Kondensator und c) die gespeicherte Gesamtenergie nachdem das Dielektrikum vollständig eingebracht worden ist.

1.2) Einbringen des Dielektrikums ($\epsilon = 3$) in einen der beiden parallel geschalteten Kondensatoren bei angeschlossener Batterie (10V).

Bestimmen sie die Ladung auf jedem Kondensator, b) die Gesamtenergie.

Diskutieren sie die unterschiedlichen Energien von 1.1) und 1.2)



(1.1)(a)

Spannung vorher an beiden Kondensatoren : $U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$

nachher: Q bleibt gleich

$$C_{1, \text{Diel}} = \epsilon \cdot C_1 = 3C_1$$

$$\Rightarrow U_{\text{Diel}} = \frac{Q_1 + Q_2}{3C_1 + C_2} \quad \text{Spannung sinkt}$$

Gesamtkapazität:
 $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$
 $Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2$

(b) Ladung vorher: $Q_1 = U \cdot C_1$

$$Q_2 = U \cdot C_2$$

nachher: $Q_{1, \text{Diel}} = U_{\text{Diel}} \cdot 3C_1 \rightarrow \text{mehr}$

$$Q_{2, \text{Diel}} = U_{\text{Diel}} \cdot C_2 \rightarrow \text{weniger}$$

(c) gespeicherte Energie vorher: $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{\text{ges}}^2}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2}{C_1 + C_2}$ neues Q_1 und Q_2

$$\Rightarrow W_{\text{el, Diel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2}{3C_1 + C_2} \quad \text{Energie sinkt}$$

1.2) (a) U const 10V \rightarrow mit Dielektrikum: $C_{1, \text{diel}} = 3C_1$
 C_2 bleibt gleich

$Q_{1, \text{diel}} = U \cdot 3C_1 \rightarrow$ verdreifacht

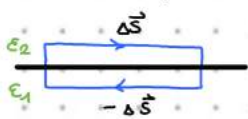
$Q_{2, \text{diel}} = Q_2 = U \cdot C_2 \rightarrow$ gleich

(b) $W_{el} = \frac{Q_{\text{ges}}^2}{C_{\text{ges}}} = \frac{(3Q_1 + Q_2)^2}{3C_1 + C_2}$

Unterschied: energy supply connected vs. not connected

- 29) a) Aus welchen Beziehungen ergibt sich die Stetigkeit der Tangential- bzw. der Normalkomponenten von \mathbf{D} und \mathbf{E} ? (Schematische Zeichnung)
 b) welche Komponenten sind stetig?
 c) Leiten sie die Brechung von \mathbf{D} und \mathbf{E} an einer Grenzfläche von zwei Materialien mit $\epsilon_1 > \epsilon_2$ her.

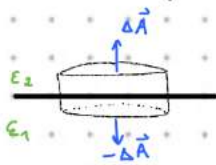
(a) Stokes $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$



$(E_{||}^{(1)} - E_{||}^{(2)}) \cdot \Delta s = 0 \Rightarrow E_{||}^{(1)} = E_{||}^{(2)}$

(b1) \rightarrow stetige Parallelkomponente

Gauss $\int \text{div } \vec{D} \, dV = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$



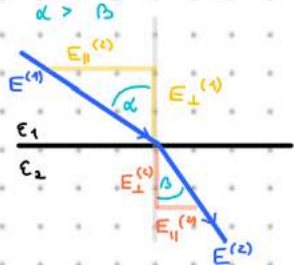
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{frei}} = 0$

keine freien Ladungen an der Oberfläche

$(D_{\perp}^{(1)} - D_{\perp}^{(2)}) \cdot \Delta A = 0 \Rightarrow D_{\perp}^{(1)} = D_{\perp}^{(2)}$

(b2) \rightarrow stetige Normalkomponente

(c) $\epsilon_1 > \epsilon_2 \Rightarrow$ "Brechung" zum Lot



$\tan \alpha = \frac{E_{||}^{(1)}}{E_{\perp}^{(1)}}$

gleich

$\Rightarrow \tan \alpha \cdot E_{\perp}^{(1)} = \tan \beta \cdot E_{\perp}^{(2)}$

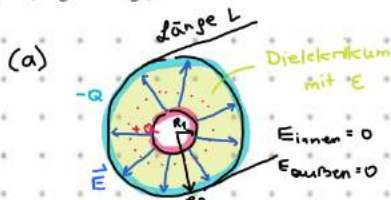
$\tan \alpha \cdot \frac{D_{\perp}^{(1)}}{\epsilon_1} = \tan \beta \cdot \frac{D_{\perp}^{(2)}}{\epsilon_2}$

$\tan \beta = \frac{E_{||}^{(2)}}{E_{\perp}^{(2)}}$

$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

gleich?

- 30) a) Berechnen Sie die Kapazität eines Zylinderkondensators mit dem Innenradius R_1 und Außenradius R_2 . Der Kondensator ist vollständig mit einem Dielektrikum ausgefüllt (dielektrische Konstante ϵ).
 b) Leiten Sie die Formel für die Energie dieses Kondensators als Funktion von Q (Ladung) und U (Spannung)
 c) Wie hoch ist der Wert der dielektrischen Konstante eines Metalls aus Sicht der Elektrostatik (Begründung!)?



(1) E -Feld im Inneren $R_1 < r < R_2$

Gauß im Betrag:
 (Richtung: radial nach außen)

$E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0 \epsilon_r A} = \frac{Q}{2\pi r \cdot L}$

$A = 2\pi r \cdot L$

(2) Potentialdifferenz

$U = \phi_{R_1} - \phi_{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi r \cdot L} \, dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

(3) $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi \epsilon_0 \cdot L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

\Rightarrow mit $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

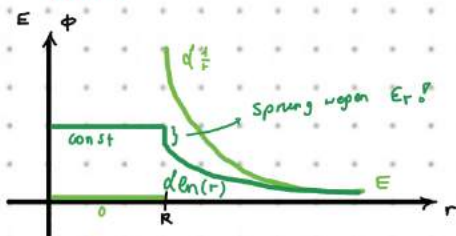
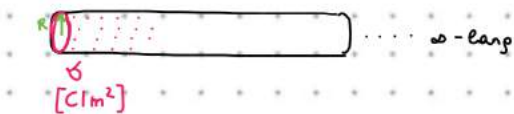
$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \cdot L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

(b) Energie: $W = Q \cdot E \cdot d = Q \cdot U$

Kraft mal Weg
 Ladung mal Potentialdifferenz

(c) statisches, homogenes \vec{E} -Feld: ϵ für Metalle ist ∞ ? e^- sind frei und bewegen sich so, dass das äußere Feld ausgeglichen wird $\rightarrow \vec{E}_{\text{innen}} = 0$
 + idealer Metall ($R=0$)

- 31) Ein unendlich langer dielektrischer Stab (Dielektrizitätskonstante ϵ) mit Radius R trägt eine Oberflächenladung σ [C/m^2]. Berechnen Sie das elektrische Feld und das Potential:
- im Innenraum
 - im Außenraum
 - Skizzieren Sie das Feld und das Potential
 - Begründen Sie die Symmetriebedingungen für die Feldkonfiguration



(a) $q_{enc} = 0 \Rightarrow E_{innen} = 0, \phi_{innen} = \text{const}$

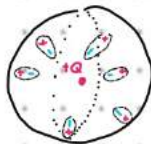
(b) $E_a = \frac{dQ_{enc}}{dA \epsilon_0} = \frac{2\pi R \cdot dl \cdot \sigma}{2\pi r \cdot dl} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R}{r}$
 Richtung: radial nach außen!

$\phi_{außen} = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(r)$ (kein Dielektrikum)

$\Rightarrow \phi_i = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0 \epsilon} \ln(R) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$

(c) radial, unendlich \rightarrow keine \parallel -Komponenten!

- 32) In der Mitte einer dielektrischen Kugel (Radius R_0 , diel. Konstante ϵ) befindet sich eine „externe“ Ladung Q . (d.h. vor dem Einbringen der Ladung war die Kugel ungeladen). Finden Sie und zeichnen Sie das elektrische Feld und das Potential im gesamten Raum.



Polarisation im Dielektrikum? \rightarrow Teilgeladungen der unpolaren Moleküle/Atome

Eigentlich: $\vec{E}_{diel} = \vec{E}_{frei} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$, $\vec{P} = Nq\vec{d}$ (Polarisation)
 $\vec{P} = Nq\vec{d}$ induz. Dipole pro Volumen (Dipolmoment \vec{p})

aber Faustregel für vollkommen von Dielektrikum gefüllten Raum:
 alle ϵ_0 durch $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ ersetzen!

\Rightarrow Innen: $\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|r|^2} \cdot \hat{e}_r$
 $r < R_0$
 $\phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$

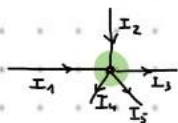
\Rightarrow außen: $\vec{E}_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|r|^2} \cdot \hat{e}_r$
 $r > R_0$
 $\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

2. Strom

Strom als Ladungstransport, Ohm'sches Gesetz, Stromleistung, Kirchhoff'sche Regeln, Messverfahren für Ströme

- 33) Aus welchen fundamentalen Beziehungen ergeben sich die Kirchhoff'schen Regeln und wie lauten diese?

(a) **Knotenregel** aus der Ladungserhaltung



Kontinuitätsgleichung: $-\frac{dQ}{dt} = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = \sum_i \int \vec{j}_i \cdot d\vec{A} = \sum_i I_i$

\rightarrow weil aber $-\frac{dQ}{dt} = 0$, da im Knoten weder Ladungen erzeugt noch vernichtet werden

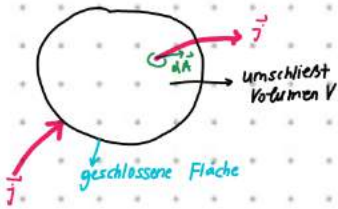
$\Rightarrow \sum I_i = 0$ Kirchhoff'sche Knotenregel

(b) **Maschenregel** aus Stokes $\hat{=}$ konservatives Kraftfeld

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \int_{\text{Masche}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{Masche}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \dots = U_{41} + U_{23} + \dots = 0$

$\Rightarrow \sum_k U_k = 0$ Summe aller Spannungen ist 0
 \Rightarrow Kirchhoff'sche Maschenregel (wie Energieerhaltungssatz)

34. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für die Ladung in integraler Form? Leiten Sie daraus die Gleichung in differentieller Form her.



Kontinuitätsgleichung in integraler Form:
$$I = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{el} dV$$

→ Ladungsänderung im ist Stromfluss durch geschlossenes Volumen!

Herleitung der differentiellen Form:

Gauss
$$\int_V \text{div } \vec{j} dV = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{j} dV$$

$$\Rightarrow \int_V \text{div } \vec{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_{el} dV \quad | \frac{d}{dV}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}$$

35. Berechnen Sie die Leitfähigkeit eines Metalls mit mittlerer freier Weglänge λ , Ladungsdichte n , und Elektronenmasse m . (Herleitung des Ohm'schen Gesetzes)

Metall... frei bewegliche Ladungen

λ ... mittl. freie Weglänge der Ladungsträger

n ... Ladungsträgerdichte

m ... Elektronenmasse

$\langle \dots \rangle$... zeitliches Mittel

$\langle \vec{v} \rangle, \langle \vec{j} \rangle = 0 \rightarrow$ aber $\langle |\vec{v}| \rangle \neq 0$

(1) ohne Feld: ungeordnete Bewegung, Stöße nur an den Atomrümpfen angenommen

mittlere Zeit zwischen 2 Stößen: $\tau = \frac{\lambda}{\langle |\vec{v}| \rangle}$

(2) mit Feld: $F = qE$ auf e^-

Beschl. $a = F/m$ zwischen den Stößen

$\rightarrow \langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{q\vec{E}}{m} \tau$... mittl. Effekt dieser gerichteten Beschleunigung zusätzlich zu randomisierten Bewegungen aus (1) ... Driftgeschwindigkeit

(3) diese uniforme überlagerte Driftgeschwindigkeit verursacht die Stromdichte: $\vec{j} = q \cdot n \cdot \langle \Delta \vec{v} \rangle$ $\langle \Delta \vec{v} \rangle := \vec{v}_D$

→ Strom $\hat{=}$ Ladungstransport!

$$\vec{j} = q \cdot n \cdot \vec{v}_D = q \cdot n \cdot \frac{q\vec{E}}{m} \cdot \tau = \frac{q^2 n \tau}{m} \cdot \vec{E} = \sigma_{el} \cdot \vec{E}$$

Ohm'sches Gesetz

$\vec{v}_D = \frac{\sigma_{el}}{qn} \cdot \vec{E} \rightarrow \frac{\sigma_{el}}{qn} = \mu$... Beweglichkeit

$\sigma_{el} = \frac{q^2 n \tau}{m}$

36. Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand R zwischen A und C (A und B) des Netzwerks aus Einzelwiderständen R_0 . (Genauso für Induktivitäten L_0 / Kapazitäten C_0 oder andere Anordnungen: Isokader, Würfel, etc.)

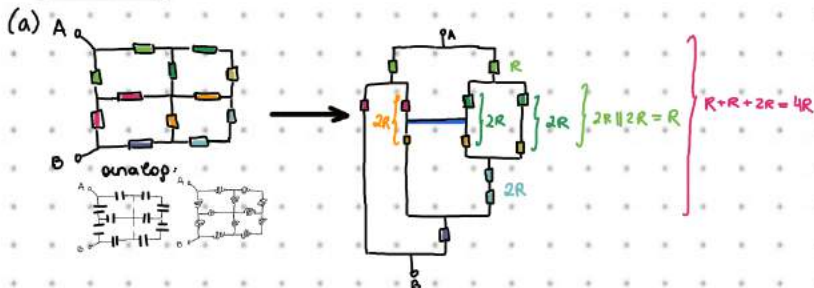


alle Widerstände / Kapazitäten / Induktivitäten haben denselben Wert R

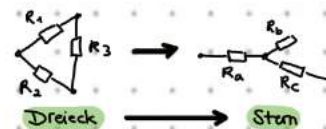
Schwierigkeit: Netzwerk so umzeichnen, dass man parallel vs. seriell bzw. Wheatstone Brücken sieht

→ dann nach und nach zusammenfassen

Art	Serie	Parallel	Kehrwert mit 2
R	$R = \sum_i R_i$	$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$	$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
C	$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$	$C = \sum_i C_i$	$C_1 + C_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
L	$L = \sum_i L_i$	$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}$	$L_1 \parallel L_2 = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$



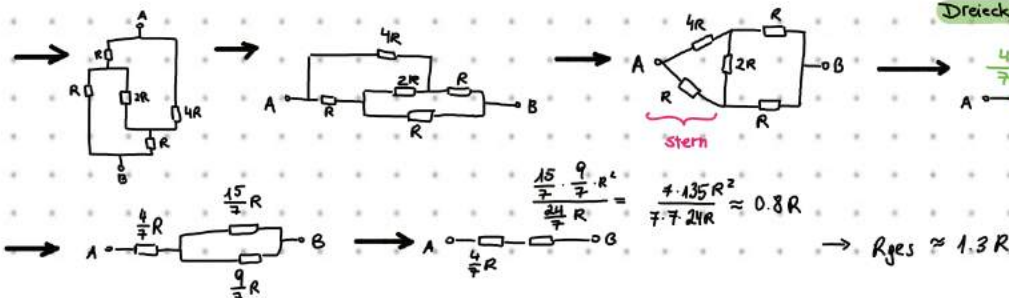
Kehrwert gleich

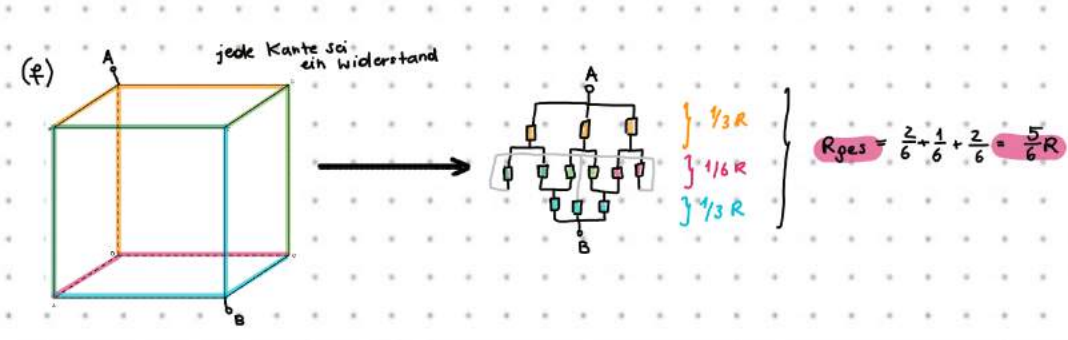
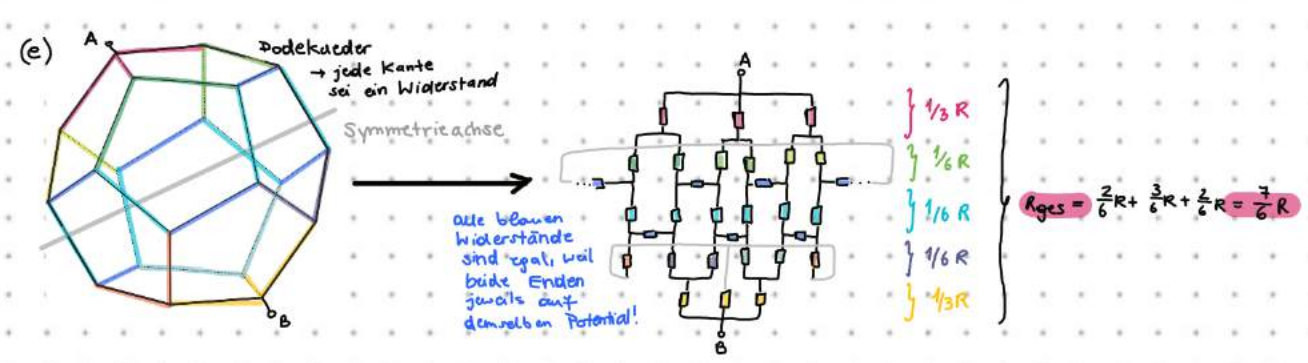
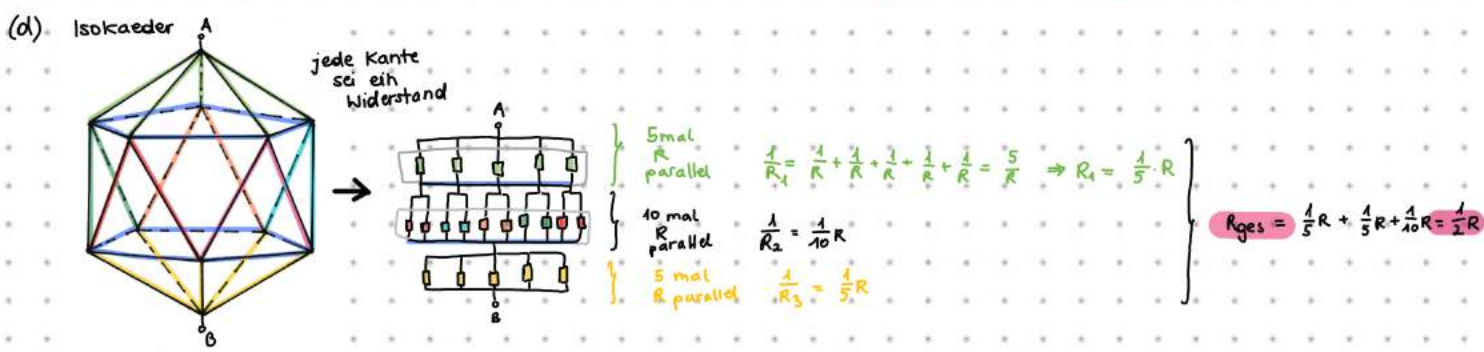
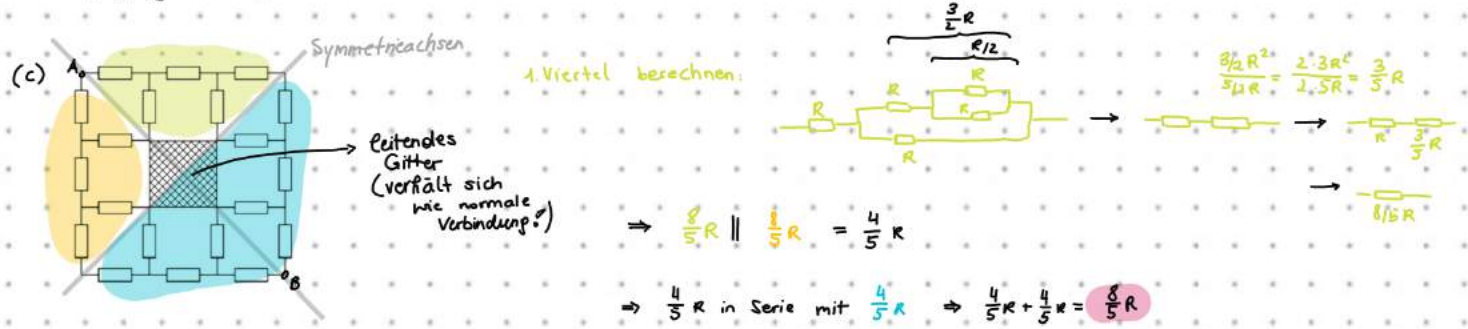
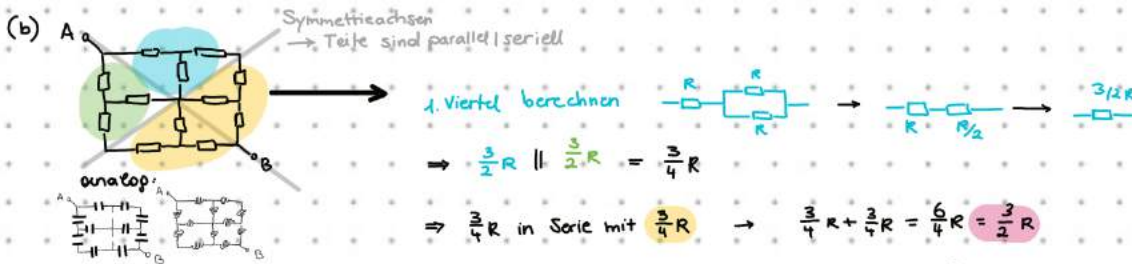


$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

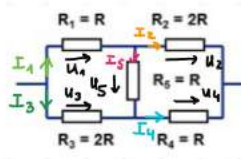
$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$





37. Kirchhoff Regeln. Gegeben ist folgende Widerstandsconfiguration. Erstellen Sie zunächst ein allgemeines Gleichungssystem, das zur Berechnung des effektiven Gesamtwiderstands notwendig ist. Lösen Sie das System unter den Annahmen $I_1 = I_4$ und $I_2 = I_3$. Begründen Sie diese Annahmen.



Knotenregeln/Maschenregeln:

$$\begin{array}{l} \text{I: } U_3 = U_1 + U_5 \Rightarrow 2R \cdot I_3 = I_1 \cdot R + R \cdot I_5 \\ \text{II: } U_2 = U_5 + U_4 \Rightarrow I_2 \cdot 2R = R \cdot I_5 + R \cdot I_4 \\ \text{III: } I_4 = I_3 + I_5 \\ \text{IV: } I_1 = I_2 + I_5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I: } \\ \text{II: } \\ \text{III: } \\ \text{IV: } \end{array}} \right\} \ominus$$

Annahmen: $I_1 = I_4$
 $I_2 = I_3$
 Wheatstone-Brücke: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ umgekehrte Wheatstonebrücke

$$I.: I_2 \cdot 2R = R \cdot I_5 + R \cdot I_4$$

$$II.: I_4 = I_2 + I_5$$

$$I.: I_2 = \frac{R \cdot (I_5 + I_4)}{2R}$$

$$I. \text{ in } II.: I_4 = \frac{I_5 + I_4}{2} + \frac{2I_5}{2}$$

$$I_4 = \frac{I_5}{2} + \frac{I_4}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_4 = \frac{1}{2} \cdot I_5$$

$$I_4 = 3 \cdot I_5 = I_1 \rightarrow \text{in } I. \quad I_2 = I_3 = 2I_5$$

$$I_{ges} = I_1 + I_3 = 5I_5$$

$$U_{ges} = U_1 + U_2 = I_1 R + I_2 \cdot 2R = 3I_5 R + 2I_5 \cdot 2R = 7I_5 R$$

$$R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{7I_5 R}{5I_5} = \frac{7}{5} R$$

38. (a) Zeigen Sie, wie man ein Strommessgerät als Voltmeter verwenden kann.

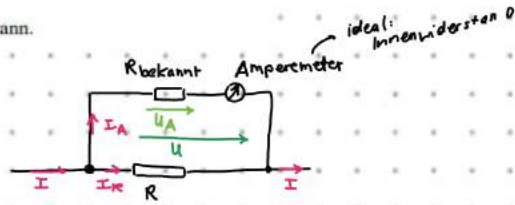
(b) Zeigen Sie, wie man ein Spannungsmessgerät als Amperemeter verwenden kann.

(a) Amperemeter in Serie mit einem bekannten Widerstand

ohne Messgerät: $U_0 = R \cdot I$ (gesucht?)
 mit Messgerät: $U = R \cdot I_R = R \cdot (I - I_A) \approx R I = U_0$
 für R bekannt $\Rightarrow R$

$$U = U_A = R_A \cdot I_A = U_0$$

bekannt gemessen

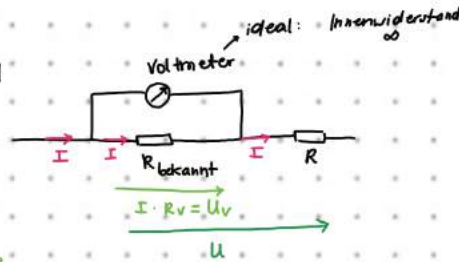


(b) Spannungsmessgerät mit bekanntem parallelen Widerstand

ohne Messgerät: $U_0 = R I$ (gesucht?)
 mit Messgerät: $U = I \cdot (R_V + R) \approx R \cdot I$

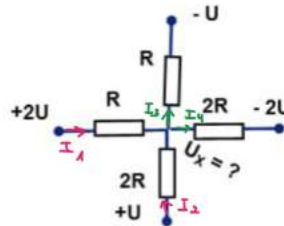
$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_V}{R_V}$$

für $R_V \ll R$ gemessen bekannt



39.

Gegeben ist eine kreuzförmige Widerstands- und Spannungs-Konfiguration wie abgebildet. Berechnen Sie die Spannung in der Mitte des Kreuzes, U_x .



$$I. \quad I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

$$II. \quad I_1 = \frac{2U - U_x}{R}$$

$$III. \quad I_2 = \frac{U - U_x}{2R}$$

$$IV. \quad I_3 = \frac{U_x - (-U)}{R}$$

$$V. \quad I_4 = \frac{U_x - (-2U)}{2R}$$

$$\frac{2U - U_x}{R} + \frac{U - U_x}{2R} = \frac{U_x - (-U)}{R} + \frac{U_x - (-2U)}{2R}$$

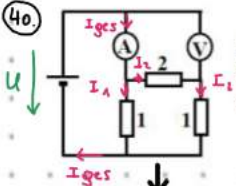
$$4U - 2U_x + U - U_x = 2U_x + 2U + U_x + 2U$$

$$5U - 3U_x = 3U_x + 4U$$

$$U = 6U_x$$

$$U_x = \frac{1}{6} U$$

40.

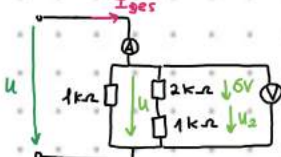


Das Voltmeter im angegebenen Schaltkreis zeigt den Wert $U = 6V$. Welcher Strom wird vom Amperemeter angezeigt? Widerstände sind in Ohm angegeben. Die Messgeräte können als ideal angenommen werden.

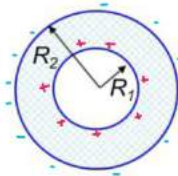
$$R_{ges} = 1k\Omega \parallel (2k\Omega + 1k\Omega) = \frac{1 \cdot 3}{1+3} = \frac{3}{4} k\Omega$$

$$I_{ges} = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{9}{\frac{3}{4} \cdot 10^3} = \frac{4 \cdot 9}{3} \cdot 10^{-3} A = 12 mA$$

$$\rightarrow \text{Spannungsteiler: } U_2 = \frac{1k\Omega}{3k\Omega} U \Rightarrow 6V = \frac{2}{3} U \Rightarrow U = 9V$$



41. Ein offenes Koaxialkabel mit Durchmessern R_1/R_2 und Länge L wird an die konstante Spannung U angeschlossen. Berechnen Sie:
 a) die Menge der statischen Ladung, die sich im Kabel befindet (Dielektrizitätskonstante des Dielektrikum ϵ , Formeln aus Formelsammlung sind nicht erlaubt)



In diesem Experiment wird gleichzeitig ein (extrem geringer) Strom I gemessen. Berechnen Sie:
 b) Spezifischen Widerstand des Dielektrikums.

(a) (1) \vec{E} berechnen

$$\vec{E}_{\text{innen}} = 0 \quad (Q_{\text{enc}} = 0)$$

$$\vec{E}_{\text{außen}} = 0 \quad (Q_{\text{enc}} = Q - Q = 0)$$

$$E_{\text{zwischen}} = \frac{Q}{A \epsilon} = \frac{Q}{2\pi \epsilon r L}$$

Zylindermantel: $2\pi r \cdot L$

Richtung: radial nach außen $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ (absolute dielektrische Konstante) \rightarrow vollständig gefüllt: ϵ_0 durch ϵ ersetzen und so die Vakuumformeln verwenden

(2) Potential berechnen

$$\phi(r) = \int E dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln(r) + C$$

(3) Spannung $\hat{=}$ Potentialdifferenz

$$U = \phi(R_2) - \phi(R_1) = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

(4) auf Q umformen: $Q = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln(R_2/R_1)} U$

(b) Strom I (sehr klein) wird gemessen

$$I = j \oint_A d\vec{A} = j \cdot A = j \cdot 2\pi R_1 L \Rightarrow j = \frac{I}{2\pi R_1 L}$$

↑
konst. Gleichstromdichte

Ohm'sches Gesetz $j = \sigma_{el} \cdot E$ mit $U = E \cdot L$ und $\sigma_{el} = \frac{1}{\rho_{el}}$

$$j = \frac{1}{\rho_{el}} \cdot \frac{U}{L}$$

$$\rho_{el} = \frac{U}{L j} = \frac{U \cdot 2\pi R_1 L}{L \cdot I} = \frac{U}{I} \cdot 2\pi R_1 = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{1}{I} \cdot 2\pi R_1 = \frac{Q R_1}{\epsilon L I} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

3. Statische Magnetfelder

Magnetfeld, Fluss, Magnetfeld stationäre Ströme

<https://youtu.be/XHrn8vjuUD8?feature=shared>

<https://youtu.be/WiXVO5DZhgq?feature=shared>

<https://youtu.be/Y86JAdBnqZA?feature=shared>

Best review videos
(Biot-Savart, Ampere, Faraday)

42. Geben Sie die Definition des Vektorpotentials. Wie kann man das Vektorpotential aus gegebenen Verteilung der Stromdichte berechnen? (Herleitung der Integralgleichung)

Def.: $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 $\vec{A}(r)$... Vektorpotential

\rightarrow Das Vektorpotential wird eingeführt, um genauso wie mit E-Feldern leichter B-Felder über ein Potential berechnen zu können. Das geht aber nicht mehr über ein skalares Potential (Gradient) sondern eben nur über ein Vektorpotential möglich.

Wellenfreiheit von \vec{B} : $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ \checkmark passt $\text{div}(\text{curl})$ immer 0!

Vektorpotential nicht eindeutig bestimmt, Coulomb-Eichung: $\text{div} \vec{A}(r) = 0$

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \stackrel{\text{Coulomb Eichung}}{=} -\Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (\text{Poissongleichung für Magnetfelder})$$

$$\Rightarrow \text{analog zur Elektrostatik: } \vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}} dV_2$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}_1) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}} dV_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$$

\rightarrow mehr phys. Bedeutung, als Rechenvereinfachung Biot-Savart dicker Draht

Dünnere Draht: $\int_V dV = \int d\vec{s} = I d\vec{s} \Rightarrow$ Linienintegral

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s} \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

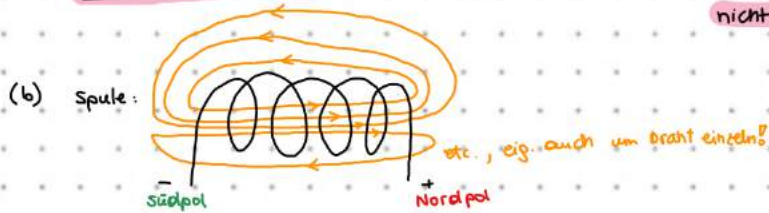
43) a) Welche Eigenschaften treffen auf statische Magnetfelder zu: konservativ, quellenfrei, wirbelfrei?

Gibt es Monopole?

b) Skizzieren Sie die Magnetfeldlinien einer Spule, eines geraden stromdurchflossenen Leiters, einer Kompassnadel, eines Dipols, einer Stromschleife, etc.

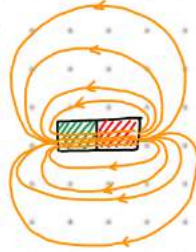
(a) **quellenfrei**: $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow$ Daraus folgt auch: **keine mag. Monopole** (Fluss aus Nordpol muss in Südpol wieder reingehen, sonst $\text{div } \vec{B} \neq 0$ und wäre nicht quellenfrei)

nicht konservativ: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \neq 0 \Rightarrow$ **nicht wirbelfrei**
nicht wegunabhängig



außenhalb des Magneten von Nord zu Süd

Kompassnadel / kurzer mag. Dipol / Stabmagnet:
Erdmagnetfeld



gerader Leiter:

Leiterschleife:

44) Berechnen sie das Feld einer langen Spule mit N gleichmäßig aufgewickelten Windungen im Mittelpunkt der Spule.

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
 $\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$
 $\mu_0 \vec{j} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}$



$\Delta A = -\mu_0 \vec{j} \Rightarrow \Delta A_i = -\mu_0 j_i$ (Superposition der Komponenten)

Ampère'sches Gesetz: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$
Magnetfeld

alle Ströme, die durch den Loop stechen
⊙ def. positiv
⊗ def. negativ

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underline{\underline{B \cdot L}} = \mu_0 I_{\text{encl}} = \underline{\underline{\mu_0 \cdot N \cdot I}}$

und $\int ds = L$
 $\vec{B} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds$
 $\vec{B} \perp d\vec{s} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
aber $\vec{B} = 0$ (außenhalb)

I_{encl} finden:

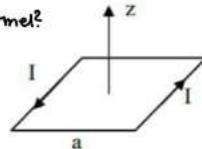


$\frac{N}{L} = n \dots$ Windungsdichte

$\Rightarrow \underline{\underline{B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L} = \mu_0 \cdot n \cdot I}}$

45) Was sind wichtige phys. Merkmale der Formel?

Ausgehend vom Biot-Savartschen Gesetz finden Sie das magnetische Feld in der Mitte einer quadratischen (alternativ: dreieckigen) Stromschleife mit Strom I und Kantenlänge a alternativ: entlang der z-Achse



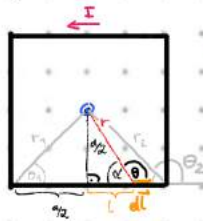
Betrag für Biot-Savart: $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta_{AB}$

$|d\vec{l} \times \hat{e}_{rz}| = |d\vec{l}| |\hat{e}_{rz}| \sin \theta_{dl \hat{e}_{rz}} = dl \sin \theta_{dl \hat{e}_{rz}}$

$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta_{dl \hat{e}_{rz}}}{r^2} dl$ Richtung separat mit RHR?

(a) quadratische Stromschleife

(1) im Mittelpunkt



Richtung: alle Teile der Leiterschleife in derselben Richtung $\rightarrow \odot \hat{e}_z$ im Mittelpunkt

$\alpha = 180 - \theta$
 $\sin \theta = \sin \alpha = \frac{a/2}{r} = \frac{a}{2r}$
 $r = \frac{a}{2 \sin \theta} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \theta}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

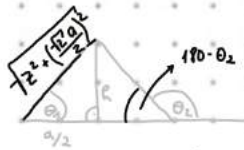
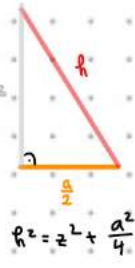
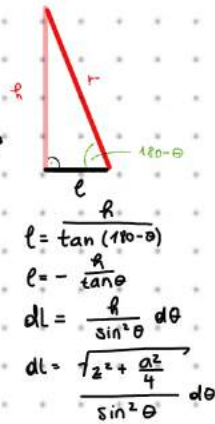
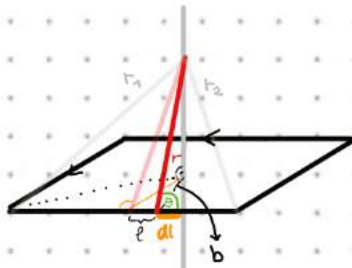
$l = \frac{a}{2 \tan \theta} \Rightarrow dl = \frac{a}{2 \sin^2 \theta} d\theta$

$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{\frac{a^2}{4 \sin^2 \theta}} \cdot \frac{a}{2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2 \sin^3 \theta}{a^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{2 \mu_0 I}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \cos(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a}$

$|\vec{B}_{\text{ges}}| = 4 \cdot |\vec{B}_1| = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a}$

$\vec{B}_{\text{ges}} = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a} \cdot \hat{e}_z$

(2) entlang der z-Achse → Symmetrie: $|\vec{B}_{ges}| \cdot \hat{e}_z = \vec{B}_{ges}$



$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{a}{2\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}\right)$$

$$\theta_2 = \arccos\left(-\frac{a}{2\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}\right)$$

$$l = \frac{a}{\tan(180-\theta)}$$

$$l = -\frac{a}{\tan\theta}$$

$$dl = \frac{a}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$dl = \frac{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$r^2 = z^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$r = \frac{a}{\sin(180-\theta)} = \frac{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sin(\theta)}$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin\theta}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sin^2\theta}}{\left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}} \cdot (-\cos(\theta)) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

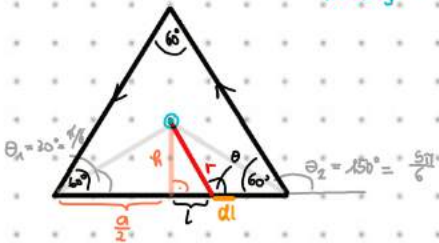
$$|\vec{B}_{ges}| = \frac{4 \mu_0 I a}{4\pi \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}} \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}} \approx \frac{\mu_0 I a}{\pi z^2}$$

$z \gg a$

(b) Dreieckige Schleife

(1) im Mittelpunkt

Richtung: $|\vec{B}_{ges}| \cdot \hat{e}_z = \vec{B}_{ges}$



$$r = \frac{a}{2 \cdot \tan(60^\circ)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$l = -\frac{a}{\tan(\theta)} = -\frac{a}{2\sqrt{3} \tan\theta}$$

$$dl = \frac{a}{2\sqrt{3} \sin^2\theta} d\theta$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{a}{2\sqrt{3} \sin\theta} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{12 \sin^2\theta}$$

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin\theta}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin\theta \cdot \frac{a}{2\sqrt{3} \sin^2\theta}}{a^2 \cdot \frac{1}{12 \sin^2\theta}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot a \sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta d\theta = \frac{3 \mu_0 I}{2 a \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{a}$$

$$|\vec{B}_{ges}| = 3 \cdot |\vec{B}_1| = \frac{3 \mu_0 I}{2 a}$$

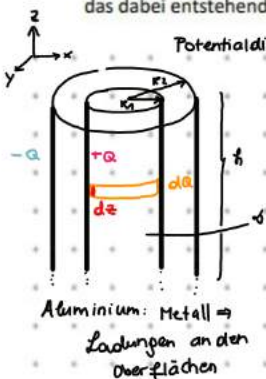
$$\vec{B}_{ges} = \frac{3 \mu_0 I}{2 a} \cdot \hat{e}_z$$

Die Biot-Savart-Formel ist ein grundlegendes Prinzip in der Elektrodynamik und beschreibt das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters. Sie hat einige wichtige physikalische Merkmale:

- Richtungsabhängigkeit:** Das durch die Biot-Savart-Formel beschriebene Magnetfeld ist immer senkrecht zur Richtung des Stroms und zur Richtung vom Ort des Stroms zum Beobachtungspunkt. Dies spiegelt die Richtungsabhängigkeit der magnetischen Kraft wider, die auf eine bewegte Ladung in einem Magnetfeld wirkt.
- Umkehrbarkeit:** Wenn die Richtung des Stroms umgekehrt wird, kehrt sich auch die Richtung des resultierenden Magnetfelds um. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass das Vorzeichen des Stroms die Richtung des Magnetfelds bestimmt.
- Abstandsabhängigkeit:** Die Stärke des Magnetfelds nimmt mit dem Quadrat des Abstands vom Strom ab. Dies spiegelt das Prinzip der Fernwirkung wider, das besagt, dass die Stärke eines Feldes mit zunehmendem Abstand von der Quelle abnimmt.
- Superposition:** Bei mehreren stromdurchflossenen Leitern addieren sich die durch jeden Leiter erzeugten Magnetfelder vektoriell an jedem Punkt im Raum. Dies ist ein Ausdruck des Superpositionsprinzips.

(2) entlang der z-Achse: aufgrund der fehlenden Symmetrie wrst kein Vo-Prüfungs-relevantes Beispiel → sonst wie (a) (2)

46. Zwei lange koaxiale Aluminiumzylinder sind mit Potentialdifferenz U aufgeladen. Der äußere Zylinder ruht, der innere rotiert um seine Achse konstant mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Beschreiben Sie das dabei entstehende Magnetfeld und bestimmen Sie seine Größe.



- Strom entsteht durch rotierende Ladung +Q
- Zylinder aus ∞ -vielen infinitesimalen runden Stromschleifen
- kreisförmig: x-y-Komponenten kanzeln sich → Feld nur in z-Richtung, variiert aber in radialer Richtung!

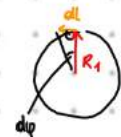
$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 h}$$

$$dQ = \sigma \cdot 2\pi R_1 \cdot dz = \frac{Q}{h} dz$$

$$\Rightarrow dI = f \cdot dQ = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{Q}{h} dz \dots \text{Strom einer "Schleife"}$$

$$\Rightarrow |d\vec{B}|(r) = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R_1^2} \cdot dl = \frac{\mu_0 dI}{4\pi R_1} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 dI}{2R_1}$$

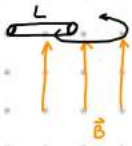
$$\Rightarrow |\vec{B}| = \int dB = \int \frac{\mu_0}{2R_1} dI = \int \frac{\mu_0}{2R_1} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{Q}{h} dz = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi R_1}$$



$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin\theta = 1$$

$$dl = R_1 \cdot d\varphi$$

47. Ein Stab der Länge L rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eines seiner Enden in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld B . Welche Spannung wird zwischen den Stabenden induziert?



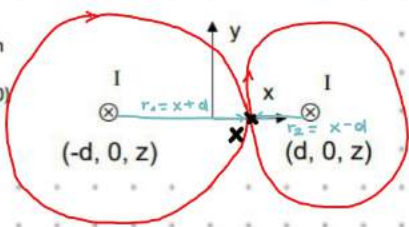
Winkelgeschwindigkeit ω \rightarrow Stab Rot Länge L , d.R. rotiert an beiden Ende mit unterschiedlichem v
 $\Rightarrow \Delta v = \omega \cdot L$, außerdem $\vec{B} \perp \vec{v}$
 $\Rightarrow \Delta F = q \cdot \Delta v \cdot B$
 $\Rightarrow E = \frac{F}{q} \Rightarrow \Delta E = \frac{\Delta F}{q} = \frac{q \cdot \Delta v \cdot B}{q} = \Delta v B = \omega \cdot L \cdot B$
 Potential: $U = \Delta \phi = - \int \Delta E dr = - \frac{B \omega L^2}{2}$

48. Berechnen sie das Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife mit dem Biot-Savartschen Gesetz (a) im Mittelpunkt der Leiterschleife und entlang einer Symmetrieachse (z-Achse); zeichnen sie schematisch den Feldverlauf.

(a) $\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1$
 $dl = r \cdot d\varphi$
 $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2r}$

(b) $F \perp dl \Rightarrow \sin \theta = \sin 90^\circ = 1$
 $B_x = \cos \alpha \cdot |\vec{B}| = \sin \alpha \cdot |\vec{B}| = \frac{R}{r} \cdot |\vec{B}| = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \cdot |\vec{B}|$
 $\Rightarrow |\vec{B}_x| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cdot \frac{1}{R^2 + z^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$

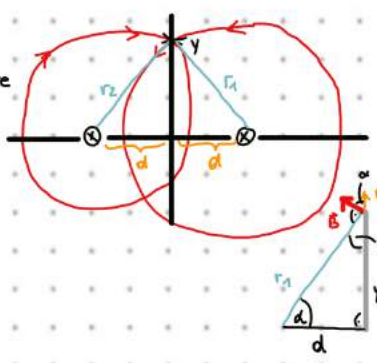
49. Zwei zueinander parallele unendlich lange Stromleitungen tragen gleichen Strom I (siehe Abb.).
 a) Berechnen Sie das magnetische Feld entlang der x-Achse $(x, 0, 0)$ und der y-Achse $(0, y, 0)$
 b) Berechnen Sie den ersten nicht-verschwindenden Term der Taylor-Entwicklung beider Formeln für $1/x, 1/y \ll 1/d$



(a) (1) auf der x-Achse

Magnetfeld \propto langer Leiter aus Ampere $\oint \vec{B} ds = \mu_0 I$
 $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$
 $\Rightarrow |x| > d: |B_{ges}| = |B_1| + |B_2| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x+d} + \frac{1}{x-d} \right)$
 $|x| < d: |B_{ges}| = |B_1 - B_2| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x+d} - \frac{1}{x-d} \right)$

(2) y Achse



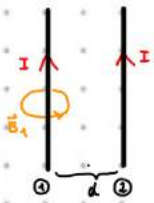
\Rightarrow y-Komponenten genau entgegengesetzt
 x-Komponenten zeigen in dieselbe Richtung!
 $B_{1,x} = \cos \alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} = \frac{y}{\sqrt{d^2 + y^2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{d^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{d^2 + y^2} = B_{2,x}$
 $\Rightarrow B_x = B_{1,x} + B_{2,x} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{y}{d^2 + y^2}$

(b) Taylorpolynom

(1) $f(d) = \frac{1}{x-d} + \frac{1}{x+d} = \frac{x-d+x+d}{x^2-d^2} = \frac{2x}{x^2-d^2} \Rightarrow T(f(d)) = \frac{2}{x} + \dots \text{etc.} \Rightarrow B(x) \approx \frac{\mu_0 I}{\pi x}$

(2) $f(d) = \frac{y}{y^2-d^2} \Rightarrow T(f(d)) = \frac{1}{y} + \dots \Rightarrow B(y) = \frac{\mu_0 I}{\pi y}$

50. Zwei zueinander parallele unendlich lange Stromleitungen tragen gleichen Strom I und befinden sich im Abstand d voneinander. Berechnen Sie explizit die Kraft zwischen beiden Leitungen.



L ... Leiterlänge

$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$ Lorentzkraft

hier: $\vec{L} \perp \vec{B} \Rightarrow F = I \cdot L \cdot B$

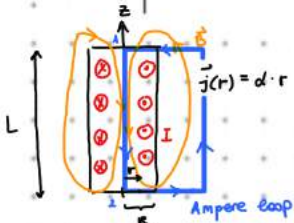
Strom von (1) erzeugt $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ beim 2. Leiter

$F = I \cdot L \cdot B_2 = I \cdot L \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \Rightarrow \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$

51.



Ein langer magnetischer Zylinder (Symmetrieachse z , Permeabilität μ) trägt im Volumen einen Kreisstrom mit der variablen Stromdichte $j(r) = \alpha r$ [A/m^2], siehe Bild. Hier r ist der Abstand von der z -Achse. Berechnen Sie das Magnetfeld im gesamten Raum.



Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_r \mu_0 I_{\text{encl}}$

(1) Außenraum $r > R$

$I_{\text{encl}} = \int_0^R j(r) dr$, \vec{B} nur auf $\ominus - \ominus$ relevant

$B \cdot L = \mu_r \mu_0 \int_0^R \alpha r dr \cdot \frac{1}{L \cdot R/2}$

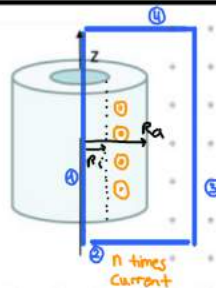
$B = \mu_r \mu_0 \alpha R$ (∞ lang...)

(2) Innenraum: $I_{\text{encl}} = \int_0^r \alpha \cdot r dr$

$B = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{\alpha \cdot r^2}{R}$

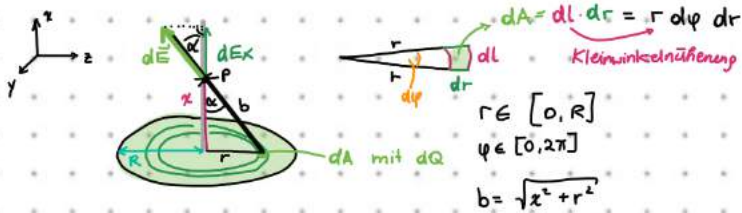
52.

Eine lange Spule ist homogen zwischen Innenradius R_i und Außenradius R_o mit Draht gewickelt und wird mit konstantem Strom I betrieben. Die Drahtdicke ist σ [Drähte/ m^2]. Das Innere des Zylinders ($r < R_i$) ist außerdem mit Material mit magnetischer Permeabilität μ gefüllt. Berechnen Sie das magnetische Feld im gesamten Raum (innen-, zwischen-, außen-).



Nebenrechnungen Pustogow

A) geladene Runde Scheibe, σ [C/m²]



$dA = dl \cdot dr = r \cdot d\phi \cdot dr \Rightarrow dQ = \sigma \cdot r \cdot d\phi \cdot dr$
 Kleinwinkelnäherung
 $dE_x = \cos \alpha \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{b^2}$
 $dE_x = \frac{x}{b} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{b^2}$
 $dE_x = \frac{x \cdot \sigma \cdot r \cdot d\phi \cdot dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$

$$E_x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{x \cdot \sigma \cdot r}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} dr d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{x\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R (x^2 + r^2)^{-3/2} dr d\phi$$

$u = x^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r dr \Rightarrow dr = \frac{du}{2r}$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{x\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{x} \right) d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} - \frac{x\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \right) d\phi = 2\pi \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} - \frac{x\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{x\sigma}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

Grenzfälle: $x \ll R \Rightarrow E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{R} \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \rightarrow$ unendlich aufgedehnte Platte

$x \gg R: E_x \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - 1 + \frac{R^2}{2x^2} \right) = \frac{\pi\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{2x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \pi R^2}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

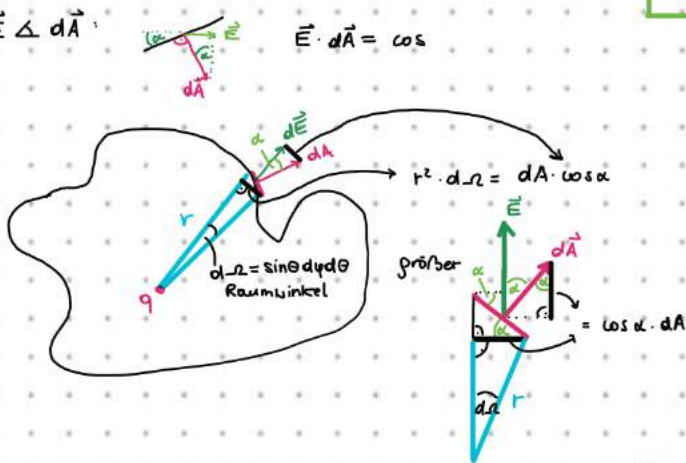
Taylor: $\frac{1}{\sqrt{1+d}} = 1 - \frac{d}{2}$
 $x_0 = 0$
 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 \rightarrow Feld einer Punkt Q

B) Fluss durch eine Fläche, Herleitung Satz von Gauss

$\vec{E} \perp d\vec{A}: \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \phi_{el} = 0$

$\vec{E} \parallel d\vec{A}: \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

$\vec{E} \Delta d\vec{A}: \vec{E} \cdot d\vec{A} = \cos \alpha$



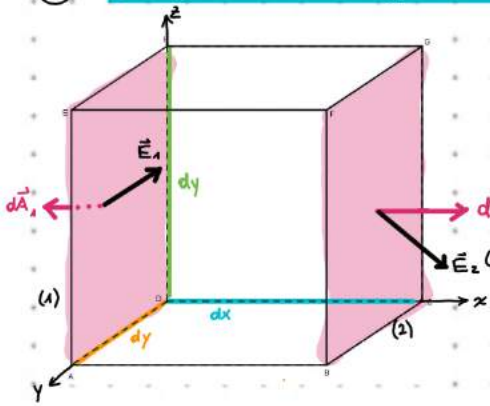
Kugelkoordinaten: $dV = r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, dr$
 $dA = \frac{dV}{dr} = r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = r^2 \, d\Omega$
 $d\Omega = \sin \theta \, d\phi \, d\theta = \frac{dA}{r^2}$

$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dA \cos \alpha$
 $\Rightarrow d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$

$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$

$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ für eine Punktladung
 unabhängig von Gauss'scher Fläche?
 $Q_{enc} =$ alle relevanten Ladungen im Inneren
 $\phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

© Satz von Gauß : Integralumwandlung



$$d\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -dy dz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

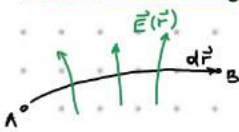
$$d\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} dy dz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -d\vec{A}_1$$

Fluss durch (1): $\vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 = -E_x \cdot dy dz$
 " durch (2): $\vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 = E_x \cdot dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx dy dz$

Gesamtfluss x-Richtung: $\frac{\partial E_x}{\partial x} dV$
 analog für
 y-Richtung: $\frac{\partial E_y}{\partial y} dV$
 z-Richtung: $\frac{\partial E_z}{\partial z} dV$

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

© Potential Herleitung

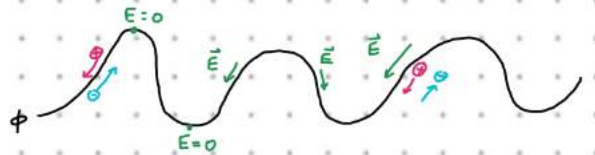


$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\phi = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \leftarrow d\phi = - \vec{E} \cdot d\vec{r} = - (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \leftarrow \phi = -\nabla \phi$$



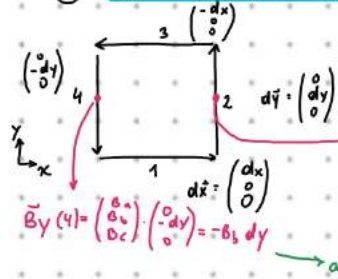
© Herleitung Äquipotentialflächen

$\phi(x, y, z) = \text{const}$ auf $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0$$

$\nabla \phi \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \nabla \phi \perp d\vec{r} \left. \vphantom{\nabla \phi \cdot d\vec{r} = 0} \right\} \text{dann Äquipotentialfläche}$
 $\vec{E} \perp d\vec{r}$

© Herleitung Ampère'scher Gesetz



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \vec{B}_x(1) dx + \vec{B}_y(2) dy - \vec{B}_x(3) dx - \vec{B}_y(4) dy = (\vec{B}_x(1) - \vec{B}_x(3)) dx + (\vec{B}_y(2) - \vec{B}_y(4)) dy$$

$$\vec{B}_y(2) = \vec{B}_y(4) + \frac{\partial \vec{B}_y(4)}{\partial x} dx$$

$$\vec{B}_y(2) dy = \begin{pmatrix} B_a + \frac{\partial B_a}{\partial x} dx \\ B_b + \frac{\partial B_b}{\partial x} dx \\ B_c + \frac{\partial B_c}{\partial x} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_b + \left(\frac{\partial B_b}{\partial x} \right) dx \end{pmatrix} dy$$

y-Richtung: $\vec{B}_y(2) dy + \vec{B}_y(4) (-dy) = \frac{\partial B_b}{\partial x} dx dy$

Stokes: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$

x-Richtung: $\vec{B}_x(1) dx + \vec{B}_x(3) (-dx) = -\frac{\partial B_a}{\partial y} dx dy$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \left(-\frac{\partial B_a}{\partial y} + \frac{\partial B_b}{\partial x} \right) dx dy = \left(\nabla \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{A}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x} dy \right) \rightarrow \text{rot } \vec{B} \neq 0, \text{ statischer } \vec{E}\text{-Feld: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0, \text{ rot } \vec{E} = 0 \text{ (Wirbelfrei)}$

G) Wellengleichung im Vakuum aus Maxwellgleichungen herleiten

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \vec{\nabla} \times$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$ Dim Vakuum!

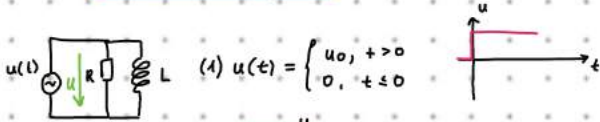
rot rot = grad div - Laplacian
 $\Delta \dots$ Laplacian
 \Rightarrow 2mal grad!

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \quad | \frac{d}{dt}$$

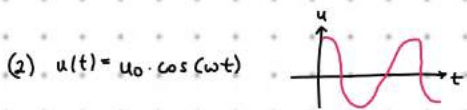
$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \quad \rightarrow \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \text{Wellengleichung}$$

Vakuum = 0

H) R-L-Parallelschwingkreis



$I_R = \frac{u}{R}$
 $u = L \frac{dI_L}{dt} \Rightarrow I_L = \int \frac{u}{L} dt$
 I_R und I_L in parallel: $I = I_R + I_L = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt = \frac{u_0}{R} + \frac{u_0 t}{L}$



def. $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{R}{L\omega}$

$$I = \frac{u_0}{R} \cos(\omega t) + \frac{1}{L} \int u_0 \cos(\omega t) dt = \frac{u_0}{R} \cos(\omega t) - \frac{u_0}{L\omega} \sin(\omega t) = \frac{u_0(L\omega - R)}{RL\omega} (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) = \frac{u_0}{RL\omega} (\cos \omega t \cdot L\omega + \sin \omega t \cdot R) =$$

*oder mit tan def.
 $R \hat{=} \sin \varphi$
 $L\omega \hat{=} \cos \varphi$*

$$= \frac{u_0}{RL\omega} (\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi)$$

(3) $u(t) = u_0 \cdot e^{i\omega t}$

$$I = \frac{u_0}{R} e^{i\omega t} + \frac{u_0}{L} \int e^{i\omega t} dt = \frac{u_0}{R} e^{i\omega t} + \frac{u_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = u_0 e^{i\omega t} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \right) = u_0 e^{i\omega t} \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{i\omega L}} = \frac{u_0}{Z} e^{i\omega t}$$

Z... Impedanz

φ ... Phase

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + i \frac{1}{\omega L}} = \frac{R}{1 - i \frac{R}{\omega L}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$

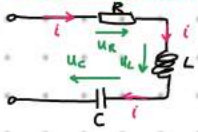
I) Wechselstrom und Anfangsbedingungen

Strom an R	$I = \frac{1}{R} \cdot u$	$I = \frac{1}{R} \cdot u$
Strom an C	$I(t) = C \frac{du}{dt}$ <i>\rightarrow sprunghaft, sonst stetig</i>	$I = C \frac{du}{dt}$
Strom an L	$I(t) \propto \int u dt$ <i>Integral baut sich auf (I baut B auf)</i>	$I \propto \int u dt$ <i>(in u(t) quadr. Strom)</i>

Spannung an R	$u = R \cdot I$	$u = R \cdot I$
Spannung an C	$I = 0$ $u \propto \frac{1}{C} \int I dt$ <i>I konstant $\frac{du}{dt}$</i>	$u \propto \frac{1}{C} \int I dt$ <i>I linear \rightarrow u quadratisch</i>
Spannung an L	<i>short pulse bei integral</i> $u = L \frac{dI}{dt}$ <i>Sonst 0</i>	$u = L \frac{dI}{dt}$ <i>kurze praktisch \rightarrow große Fänderung</i> $\frac{dI}{dt} = \text{konst}$

Frequenzabhängigkeit: $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z(C) = 0$
 $Z(L) = \infty$

J) RLC-Serienschwingkreis ges. $i(t)$



gleicher Strom durch alle

Ansatz: $I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$

$$\frac{dI}{dt} = i\omega \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t}$$

einsetzen und kürzen

Diff. gl. aufstellen: $U_R = R \cdot I$, $U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$, $U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt$

$$U_L + U_R + U_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} - R \cdot I + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad | :L \text{ ableiten } \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \quad \dots \text{ Diff. Gleichung hom. Ein. 2. Ordnung} \Rightarrow \text{lösen}$$

$$-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

sei: $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\omega^2 - 2i\omega\delta - \omega_0^2 = 0$$

\Rightarrow quadr. Gleichung lösen: $\omega_2 = (\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})$

$$\Rightarrow I(t) = A \cdot e^{i(\delta + \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} + B \cdot e^{i(\delta - \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t}$$

$$I(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(A \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} + B \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} \right)$$

$$\omega_0 \gg \delta^2 \Rightarrow I(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t} \right)$$

Euler + AWP: $(A+B) \cos(\omega_0 t) + i(A-B) \sin(\omega_0 t)$

$$I(0) = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$A+B=0$$

$$i(A-B) = 2iA = I_0$$

K) Skin-Effekt Herleitung

Maxwell Gleichungen: (1) Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

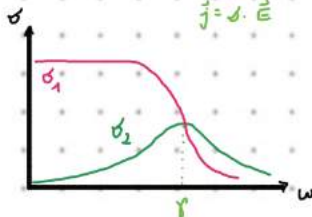
für nicht magn. Materie

(2) Ampere: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma_1 \vec{E} + i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E} = (\sigma_1 + i\sigma_2) \vec{E}$

$\vec{E} = E_0 \cdot e^{i\omega t}$

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

Metall mit Drude-Modell:



$\omega \ll \gamma: \sigma_1 \gg \sigma_2 \Rightarrow (2) \nabla \times \vec{H} = \sigma_1 \vec{E}$

(2) ableiten: $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$

(1) rot: $-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ in 1D lösen $(E(r))$

Laplacian $\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (im Vakuum, bzw. ohne freie Ladungen)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} = \mu_0 \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\frac{1}{\delta^2} \vec{E}(r) = i\omega \mu_0 \sigma_1 \vec{E}(r)$$

Ansatz: $\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 e^{-r/\delta} e^{i\omega t}$
 $\vec{E}(r)$ zeitliche Änderung

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{i\omega \mu_0 \sigma_1}} = \sqrt{\frac{-i}{\omega \mu_0 \sigma_1}} = \frac{1-i}{\sqrt{2} \omega \mu_0 \sigma_1}$$

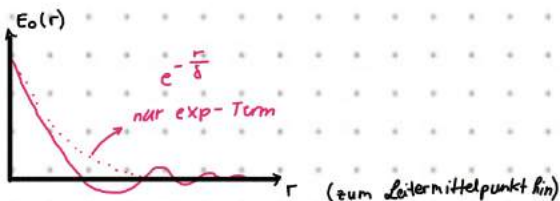
... Skin-Tiefe Eindringtiefe

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\omega \mu_0 \sigma_1}}$$

$\sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1-i)$

$$\Rightarrow \vec{E}_0(r) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega \mu_0 \sigma_1 r} \cdot e^{-i\sqrt{2} \omega \mu_0 \sigma_1 r}$$

Skin-Effekt exponentielle Abnahme
 Dämpfung im Inneren



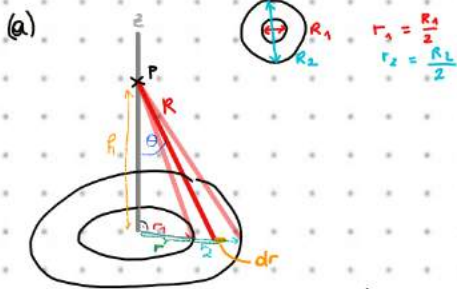
Beispielprüfungen von Kommilitonen

Prüfung 1 (12.05.2022, A)

1. Elektrostatisches Feld eines geladenen Rings (13 Pkt.)

Ein geladener Ring (Flächenladungsdichte σ) mit Innendurchmesser R_1 und Außendurchmesser R_2 liegt in der xy -Ebene konzentrisch um den Ursprung.

- Skizzieren Sie die Anordnung.
- Wie groß ist das elektrische Feld im Ursprung?
- Berechnen Sie das elektrische Feld in einem Abstand h entlang der z -Achse.
- Wie groß muss h sein, damit das resultierende elektrische Feld gleich groß ist wie das einer homogen geladenen Scheibe mit Radius R_1 , die in der xy -Ebene konzentrisch um den Ursprung liegt? Geben Sie das Verhältnis h/R_1 and für $h/R_2 = 1/\sqrt{3}$.



(b) Im Ursprung $E=0 \Rightarrow$ Symmetrie des Rings

(c) Ladung dQ eines kleinen Rings: $dQ = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$

Abstand von diesem Ring: $R = \sqrt{r^2 + h^2}$

Coulomb: $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi r}{R^2 + r^2} dr$

Symmetrie: E_x und E_y kompensieren sich

$E_z = \cos \theta \cdot E = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} \cdot E$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{(R^2 + r^2)^{3/2}} dr = \left[\frac{u = R^2 + r^2}{du = 2r dr} \right] = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{u_1}^{u_2} \frac{r}{2r \cdot u^{3/2}} du = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \left(-2 \right) \cdot u^{-1/2} \Big|_{u_1}^{u_2}$$

$$= \frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + R^2}} \right)$$

(d) Scheibe: $r_1=0$
 $r_2 = R_1 = 2 \cdot r_1$
 $\Rightarrow E_{\text{Scheibe}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{4r_1^2 + R^2}} \right)$

$\Rightarrow E_{\text{Scheibe}} = E_{\text{Ring}}$

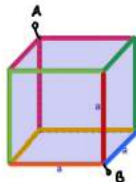
$$\frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{4r_1^2 + R^2}} \right)$$

$$\sqrt{r_2^2 + R^2} - \sqrt{r_1^2 + R^2} = \sqrt{(r_2^2 + R^2)(r_1^2 + R^2)} - \frac{R \cdot \sqrt{(r_2^2 + R^2)(r_1^2 + R^2)}}{\sqrt{4r_1^2 + R^2}}$$

umformen $\frac{R}{R_1} = \frac{2R}{r_1} = ?$
 $\frac{R}{R_2} = \frac{2R}{r_2} = ?$

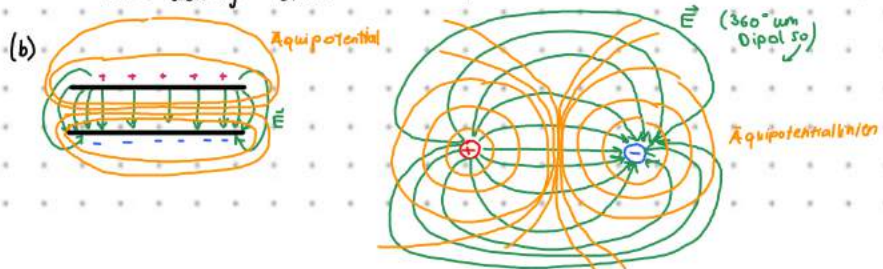
2. Elektrisches Potential, Kondensatoren (12 Pkt.)

- Welche Eigenschaften treffen auf elektrostatische Felder zu: konservativ, quellenfrei, wirbelfrei? Wann können elektrische Felder ohne Ladungen existieren?
- Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien und Äquipotentiallinien eines Plattenkondensators und eines elektrischen Dipols.
- Um wieviel ändert sich die elektrostatische Energie W eines Kondensators wenn (i) die Ladung Q bzw. (ii) der Plattenabstand d verdreifacht werden?
- Bestimmen Sie die Gesamtkapazität C des rechts dargestellten Netzwerks; an jeder Kante des Würfels befindet sich ein Kondensator mit Kapazität C_0 .



(a) konservativ mit $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
 wirbelfrei mit $\nabla \times \vec{E} = 0$ (folgt aus $-\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ für elektrostatische Felder)

\rightarrow ohne Ladung: elektrische Wirbelfelder durch zeitlich veränderliche Magnetfelder, also $-\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$



$$(c) \quad W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad (\text{aus: } U = \frac{Q}{C})$$

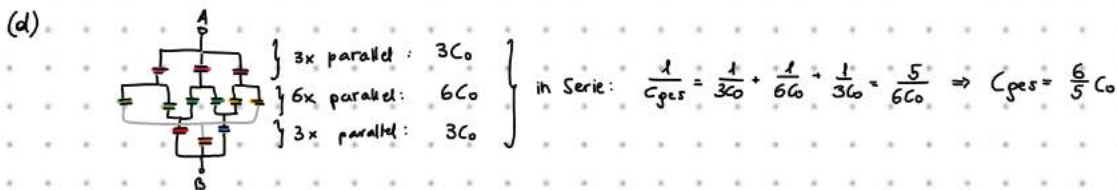
$$(i) \quad Q_{\text{neu}} = 3Q \Rightarrow W_{\text{neu}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3Q)^2}{C} = 9 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \right) \Rightarrow W \text{ verneunfacht sich!}$$

$C = \text{konst}$
aber neue Ladung \rightarrow anderes U

$$(ii) \quad \text{neues } d \rightarrow \text{andere Kapazität} \quad W_{\text{neu}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\frac{1}{3}C} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \right) \Rightarrow W \text{ verdreifacht sich!}$$

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \rightarrow C_{\text{neu}} = \frac{\epsilon A}{3d} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\epsilon A}{d} = \frac{1}{3} \cdot C$$

Q konst, aber U ändert sich



3. Elektromagnetische Wellen in einem Dielektrikum (11 Pkt.)

- Geben Sie die Ladungsdichte ρ , die Stromdichte j und die Permeabilität μ in einem neutralen nichtmagnetischen Isolator an!
- Leiten Sie mithilfe der Maxwellgleichung die Wellengleichung für das elektrische Feld in einem Dielektrikum her!
- Breitet sich die elektromagnetische Welle im Dielektrikum schneller oder langsamer aus als im Vakuum? Wie schnell ist eine Radiowelle ($\epsilon_r \approx 81$) in Wasser?

(a) Isolator: $\rho \approx 0$ (keine freien Ladungen, neutral)

nichtmagnetisch: $\mu_r = 1 \Rightarrow \mu = \mu_r \cdot \mu_0 = \mu_0$

$$\text{Ohm'scher Gesetz: } j = \sigma_{\text{el}} \cdot \vec{E} \approx 0$$

\rightarrow Leitfähigkeit ohne Ladungen ($\rho=0$) ist $\sigma_{\text{el}} \approx 0$

$$(b) \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}) \rightarrow \text{Dielektrikum mit } \rho = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{D} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{quellenfrei})$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{im Dielektrikum: } j = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{E}$$

$\Rightarrow 0$ in Dielektrikum

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}_{\frac{1}{c_0^2}} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta \vec{E} - \left(\frac{c_0}{c_{\text{diel}}} \right)^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}}$$

$$(c) \quad \left(\frac{1}{c_{\text{diel}}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} \right)^2$$

$$\Rightarrow c_{\text{diel}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \Rightarrow \text{langsamer!}$$

$$\Rightarrow \text{Radiowelle: } c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \epsilon_r = 81 \quad \Rightarrow c_{\text{diel}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{9} = \frac{1}{3} \cdot 10^8 \text{ m/s} = \underline{\underline{3.3 \cdot 10^7 \text{ m/s}}}$$

4. Permanentmagnet in inhomogenem Magnetfeld (10 Pkt.)

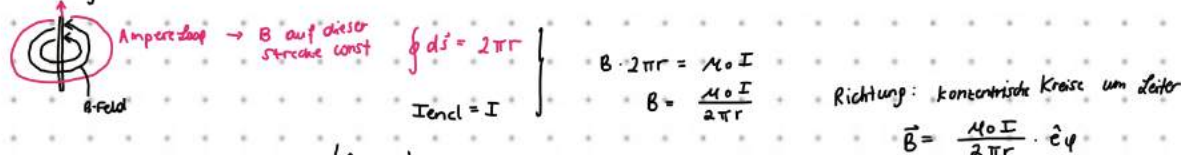
Ein Permanentmagnet (Volumen V) befindet sich neben einem geraden stromdurchflossenen Leiter (Strom I), welcher an der Position $x = y = 0$ liegt und unendlich lang in z-Richtung ist.

- Was für eine Form von Magnetismus tritt in einem Permanentmagneten auf?
- Geben Sie die potenzielle Energie des Permanentmagneten in einem externen Magnetfeld B an. Nehmen Sie hierfür an, dass die Magnetisierung M parallel zu B ist und nicht von der Feldstärke abhängt.
- Geben Sie das Magnetfeld B des geraden Leiters an und skizzieren Sie es!
- Bestimmen Sie die Kräfte auf den Permanentmagneten im inhomogenen Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters! Das Dipolmoment des Permanentmagneten ist antiparallel zum Magnetfeld des Leiters ausgerichtet.
- Der Permanentmagnet wird nun an einer Feder (Federkonstante k) befestigt, deren Gleichgewichtsposition sich bei $x = y = 0$ befindet. Die Feder liegt auf der x-Achse und kann nur in $\pm x$ ausgelenkt werden. Wie groß ist der Abstand R zwischen Magnet und Leiter?
- Was passiert, wenn die Richtung des Strom umgekehrt wird?

(a) Ferromagnetismus: zuerst findet eine Magnetisierung statt, dann bleibt das Remanenzfeld erhalten! $\chi_m \gg 1$

(b) $\vec{M} \parallel \vec{B}$: $M = \frac{\chi_m}{\mu_0} B$ $E_{pot} = -\vec{p}_{mag} \cdot \vec{B} = -p_{mag} \cdot B$ (parallel!)
 $M = \frac{1}{V} \sum p_{mag}$ $E_{pot} = -\sum p_{mag} \cdot B$
 $M \cdot V = \sum p_{mag}$ $E_{pot} = -\frac{\chi_m}{\mu_0} \cdot B^2 \cdot V$ $F = -\frac{\partial}{\partial r} E_{pot} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \cdot V \cdot 2 \frac{\partial B}{\partial r}$
 $\sum p_{mag} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \cdot B \cdot V$

(c) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl}$ (Ampere'sches Gesetz)



(d) $F = -\nabla E_{pot} = -p_{mag} \left(\frac{\partial}{\partial r} B \right) = -p_{mag} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) \cdot \hat{e}_r = \frac{p_{mag} \mu_0 I}{2\pi r^2} \hat{e}_r \Rightarrow$ Richtung: radial nach außen
 $E_{pot} = -\vec{p}_{mag} \cdot \vec{B} = p_{mag} B$ Zyl. koord. \rightarrow nur r-Komp. $\neq 0$
antiparallel $\frac{\partial B}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}$

(e) $F = k \cdot x = \frac{p_{mag} \mu_0 I}{2\pi x^2}$
 $\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{p_{mag} \mu_0 I}{2\pi k}}$

(f) Strom umkehren:
 aus (b) $E_{pot} = -p_{mag} \cdot B$
 $F = -\nabla E_{pot} = \frac{p_{mag} \mu_0 (-I)}{2\pi r^2} \hat{e}_r \rightarrow$ Kraft Richtung innen \rightarrow Anziehungskraft statt abstoßend

5. RL Schwingkreis (14 Pkt.)

Ein RL Parallelschwingkreis mit einem Schalter vor L und R wird eine Zeit lang bei geschlossenem Schalter mit konstantem Strom I_0 betrieben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird dieser durch Öffnen des Schalters von der Quelle getrennt.

- Beschreiben Sie qualitativ die Ströme im Widerstand und der Spule direkt vor und direkt nach dem Ausschalten der Quelle.
- Berechnen Sie die Spannung an der Spule für $t > 0$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen. (Herleitung!)
- Wie hoch ist die am Widerstand erzeugte Gesamtwärme für $t > 0$?

(a) konst. Strom I_0 : $I = U \cdot R$, $U = L \frac{dI}{dt} \rightarrow U = 0 \rightarrow$ Kurzschluss an der Spule: gesamter Strom durch Spule, keiner durch R (kurz vorher)

kurz danach: $I_{ges} = 0$, aber kurz nach Trennung muss der Strom an der Spule noch $I_L = I_0$ sein, weil die Spannung $U = L \frac{dI}{dt}$ keine Sprünge machen kann
 keine Quelle \rightarrow mit $I_L = I_0$ also $I_R = -I_0$

(b) parallel: beide auf der gleichen Spannung

$L \cdot \frac{dI_L}{dt} = -R \cdot I_R$ AWP: $I_R = I_L$, $I(0) = I_0$

$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = 0$ (hom. lin. DGL 1. Ordnung)

Ansatz: $I(t) = A \cdot e^{\lambda t}$
 $I'(t) = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t}$

$L \cdot \lambda + R = 0$
 $\lambda = -\frac{R}{L} \Rightarrow I(t) = A \cdot e^{-R/L \cdot t}$

$I(0) = A \cdot e^0 = A := I_0 \Rightarrow I(t) = I_0 \cdot e^{-R/L \cdot t}$

$U_R = U_L = R \cdot I(t) \Rightarrow U_L(t) = U_R(t) = R \cdot I_0 \cdot e^{-R/L \cdot t}$

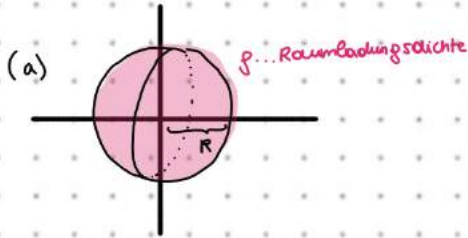
(c) $P(t) = R \cdot I(t)^2$
 $P_{ges} = \int_0^\infty P(t) dt = R \cdot I_0^2 \cdot \int_0^\infty e^{-2R/L \cdot t} dt =$
 $= R \cdot I_0^2 \cdot \left(-\frac{L}{2R} \cdot e^{-2R/L \cdot t} \right) \Big|_0^\infty =$
 $= R \cdot I_0^2 \cdot \left(0 + \frac{L}{2R} \right) =$
 $= R \cdot I_0^2 \cdot \frac{L}{2R}$

(Im B-Feld war Energie gespeichert \rightarrow an R in Wärme umgewandelt)

Unbekannte Prüfung aus 2024

1. Homogen geladene Vollkugel mit Radius R (Mittelpunkt im Ursprung) mit Ladungsdichte ρ

- Skizzieren Sie den Aufbau.
- Berechnen Sie das Feld im Punkt $(0, 0, 0)$.
- Berechnen Sie das Potential im gesamten Raum.
- Skizzieren Sie das E-Feld im gesamten Raum.
- Ein Teil der Kugelmitte ($r \in [0, R/2]$) wird mit inversem Vorzeichen geladen. Wie groß muss diese zweite (zusätzliche) Ladungsdichte sein, damit von weit weg das E-Feld 0 ergibt.



(b) $E(0,0,0) = 0$, da sich aufgrund der Symmetrie alle Beiträge aufheben

(c) Kugelsymmetrie: nur Abstand r vom Mittelpunkt relevant! Richtung: nach außen

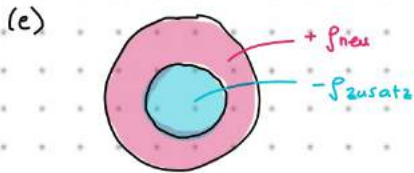
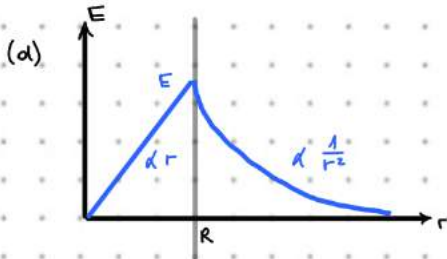
Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0 A}$
 in Betragform $Q = \rho \cdot V$
 $A = 4\pi r^2$
 \rightarrow Ladung innerhalb
 Gaussian surface (Kugel)

$\bullet r < R: E = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

$\bullet r > R: E = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3}}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 r^2}$

$\rightarrow \phi(r < R) = - \int E(r < R) dr = - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$

$\phi(r > R) = - \int E(r > R) dr = - \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 r}$



Annahme: neg. Ladungen sind zusätzlich \rightarrow pos. Teil hat neue, größere Ladungsdichte

$Q_{voll} = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \rho_{neu} \cdot \left(\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi (R/2)^3}{3} \right) = \rho_{neu} \cdot 4\pi R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) = \rho_{neu} \cdot 4\pi R^3 \cdot \frac{7}{24} = \int_{neu} \rho_{neu} \cdot \frac{7}{6} \cdot 4\pi R^3$

$\rho_{neu} = \rho \cdot \frac{4\pi R^3 \cdot 6}{7\pi R^3 \cdot 3} = \rho \cdot \frac{24}{21} = \frac{8}{7} \cdot \rho$

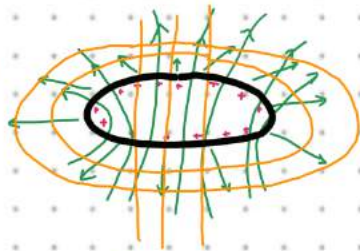
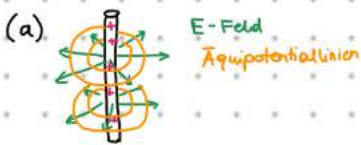
$\rho = \rho_{neu} \cdot \frac{7}{8}$

$Q_{voll} \stackrel{!}{=} Q_{klein}$
 $\rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \stackrel{!}{=} \rho_{Zusatz} \cdot \frac{4\pi (R/2)^3}{3}$

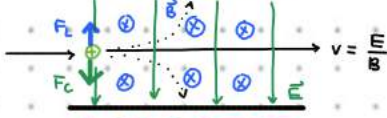
$\rho_{Zusatz} = \rho \cdot \frac{4\pi R^3 \cdot 24}{4\pi R^3 \cdot 3} = \rho \cdot \frac{24}{3} = \rho \cdot 8 = \rho_{neu} \cdot 7$

2. Potential, Feldlinien, Anwendungen

- Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien und E-Feldlinien eines Stabes und eines geladenen Ringes.
- Skizzieren Sie eine Kombination aus E-Feld und Magnetfeld, die es ermöglicht, Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit herauszufiltern.
- Wenn sich ein Teilchen mit $v = \frac{3}{8}c$ bewegt, um wie viel langsamer vergeht die Zeit für das Teilchen?



(b) Wien-Filter \vec{B} -Feld mit rechter Hand Regel bestimmen



$F_L = F_C$
 $v \cdot q \cdot B = q \cdot E$
 $v = \frac{E}{B}$... Teilchen mit diesem v kommen durch
 $v > \frac{E}{B} \Rightarrow F_L$ überwiegt
 $v < \frac{E}{B} \Rightarrow F_C$ überwiegt

(c) Zeitdilatation: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(3/8c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{64}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{55}{64}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{11}}$
 $\Delta t_{bewegt} = \Delta t_{ruhe} \cdot \gamma = \Delta t_{ruhe} \cdot \frac{4}{\sqrt{11}}$
 \Rightarrow Zeit vergeht um 25% langsamer?

3. Paramagnetischer Isolator

- Wie groß sind die Ladungsdichte, die Stromdichte und die Permeabilitätszahl μ in einem paramagnetischen Isolator, an dem keine Felder anliegen?
- Leiten Sie die Geschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem paramagnetischen Isolator her!
- Der paramagnetische Isolator verliert seine magnetischen Eigenschaften, wird also unmagnetisch. Wird die Welle langsamer oder schneller?

(a) Isolator: $\rho = 0$ (keine freien Ladungen)

$$j = \sigma_{el} \cdot \vec{E} = 0$$

↳ Leitfähigkeit ohne freie Ladungen = 0

μ_r ist etwas größer als $\mu_0 \Rightarrow$ leicht magnetisch reaktiv

(b) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 0$

$\text{div } \vec{B} = 0$ (quellenfrei)

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \left(j + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

hier 0

$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \underbrace{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}_{\left(\frac{1}{c_{\text{diel}}}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

mit $\mu_0 \epsilon_0 = \left(\frac{1}{c_0}\right)^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c_{\text{diel}}}\right)^2 = \epsilon_r \mu_r \cdot \left(\frac{1}{c_0}\right)^2$$

$$\frac{1}{c_{\text{diel}}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot \frac{1}{c_0}$$

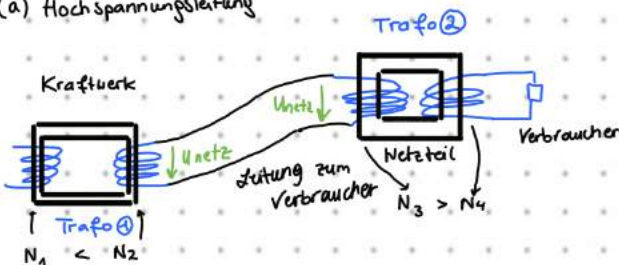
$$c_{\text{diel}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

→ (c) mit $\mu_r = 1 \Rightarrow$ durch weniger dividiert $\rightarrow c_{\text{diel}}$ wird größer \Rightarrow Welle wird schneller

4. Strom und Anwendungen

- Skizzieren Sie den Aufbau einer Transformations-Hochspannungsleitung vom Kraftwerk bis zum Verbraucher, markieren Sie am Trafo die Spule mit mehr Windungszahl.
- Wie ist das Verhältnis zwischen Verlustleistung und transportierter Leistung? Zeigen Sie, warum man Hochspannung zum Transport verwendet.
- Ihr Handykabel transformiert die Netzspannung mit einem Effektivwert von 220 Volt auf 5 V. Beschreiben Sie das Verhältnis der Windungszahlen!

(a) Hochspannungsleitung



- ① erzeugt Hochspannung
- ② transformiert wieder runter

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} \quad (\text{idealer Trafo})$$

$$\Delta P_{\text{leit}} = \Delta U_{\text{leit}} \cdot I = R_{\text{leit}} \cdot I^2$$

$$P_{\text{trans}} = U_{\text{netz}} \cdot I$$

(b) Verlustleistung:
ideale Transfos, aber Verluste in den Leitungen

ΔP_{leit} ... Verlust in Leitungen

P_{trans} ... transportierte Leistung

R_{leit} ... Leitungswiderstand

$$\frac{\Delta P_{\text{leit}}}{P_{\text{trans}}} = \frac{\Delta U_{\text{leit}} \cdot I}{U_{\text{netz}} \cdot I} = \frac{R_{\text{leit}} \cdot I^2}{U_{\text{netz}} \cdot I} = \frac{R_{\text{leit}}}{U_{\text{netz}}^2} \cdot P_{\text{trans}} \Rightarrow \Delta P_{\text{leit}} = \frac{R_{\text{leit}}}{U_{\text{netz}}^2} P_{\text{trans}}$$

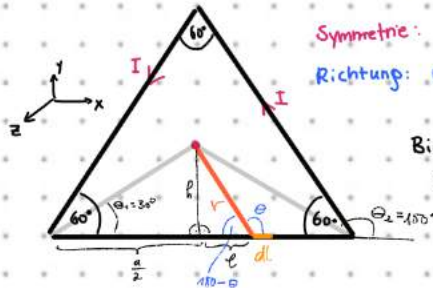
⇒ höhere Netzspannung verursacht viel kleinere Verluste!

(c) $U_1 = 220\text{V}$
 $U_2 = 5\text{V}$ $\Rightarrow \frac{220}{5} = \frac{N_3}{N_4}$ (Bezeichnungen aus obiger Abbildung)

$$N_3 = 44 \cdot N_4$$

5. Statisches Magnetfeld

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a. Berechnen Sie das Magnetfeld in der Mitte mit dem Gesetz von Biot-Savart.



Symmetrie: $|\vec{B}_{\text{ges}}| = 3 \cdot |\vec{B}_{\text{eine Kante}}|$

Richtung: rechte Hand Regel, alle Kanten Beitrag in z-Richtung $\Rightarrow \vec{B}_{\text{ges}} = 3 \cdot |\vec{B}_1| \cdot \hat{e}_z$

Biot Savart: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^2}$
(für dünne Drähte!)

Betragsform: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin\theta}{r^2} dl$

Winkel zw. \vec{r} und $d\vec{l}$

$$r = \frac{h}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \tan(30^\circ)}{\sin(\theta)} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\sin\theta} = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\theta}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{12\sin^2\theta}$$

$$l = \frac{h}{\tan(180^\circ - \theta)} = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{a}{2\sqrt{3}\tan\theta}$$

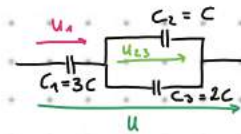
$$dl = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin^2\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin\theta \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}\sin^2\theta} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}\sin^2\theta}}{a^2 \cdot 2\sqrt{3}\sin^2\theta} d\theta = \frac{6\mu_0 I}{4\pi\sqrt{3}a} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta d\theta = \frac{3\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{ges}} = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} \hat{e}_z$$

6. Stromkreise

- a. Gegeben ist die nebenstehende Kondensatorschaltung, die mit der Spannung U betrieben wird. Berechnen Sie die Ladungen an den einzelnen Kondensatoren!
 b. Gegeben sei ein RLC Serienschwingkreis, der mit $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ betrieben wird. Berechnen Sie (i) die Impedanz der Schaltung, (ii) die Spannung an der Spule, (iii) den Strom durch den Kondensator.



(a) $Q = CU$

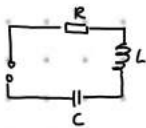
$$U_1 + U_{23} = U$$

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 3C = C_1 \Rightarrow U_1 = U_{23} = \frac{U}{2} \Rightarrow Q_1 = \frac{U}{2} \cdot 3C = \frac{3}{2} CU$$

$$Q_2 = \frac{U}{2} \cdot 1C = \frac{1}{2} CU$$

$$Q_3 = \frac{U}{2} \cdot 2C = CU$$

(b) $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$



(i) Gesamtimpedanz: $Z = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}$
 Betrag: $Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

(ii) $I(t) = |Z| \cdot U(t) = \frac{1}{|Z|} \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}$
 $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

Spule: $U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot U_0 \cdot \omega L \cdot e^{i\omega t}$

(ii) Kondensator: $I_C(t) = C \cdot \frac{dU}{dt} = \omega C \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \left(1 - \frac{R + \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\right)$

Spannung an R: $U_R(t) = I(t) \cdot R$

Spannung an L: $U_L(t) = \omega L \cdot I(t)$

Spannung an C: $U(t) - U_R(t) - U_L(t) = U_C(t)$

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \left(1 - \frac{R + \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\right)$$

Prüfung am 20.06.2022 (B)

1. Skin-Effekt in einem Metall (11 Pkt.)

- Geben Sie die Ladungsdichte, die Stromdichte und die magnetische Permeabilität in einem neutralen, nichtmagnetischen Metall an.
- Leiten Sie mithilfe der Maxwell-Gleichungen und des Ohm'schen Gesetzes ($j = \sigma E$) die Skin-Tiefe für das elektrische Feld in einem Metall her. Nehmen Sie hierfür $j \gg \frac{\partial D}{\partial t}$ an und vernachlässigen Sie den letzteren Term.
- Bei welcher Eindringtiefe im Metall ist das Magnetfeld um die Hälfte abgeklungen?
- Für Kupfer beträgt die Eindringtiefe 1cm bei 50 Hz. Wie groß ist die bei 5 GHz?

(a) neutral: $\rho = 0$ (keine freien Ladungen)
 nicht magnetisch: $\mu_r = 1 \rightarrow \mu = \mu_0$
 Stromdichte: $j = \sigma \cdot E = 0$
 $\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot E = 0$

} ohne Feld

(b) Skin-Tief Perleiten:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot (j + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma_1 \vec{E} + i\omega \epsilon_0 \vec{E} \approx \sigma_1 \vec{E}$$

$$\vec{j} = \sigma_1 \vec{E}$$

$\sigma_1 \gg \sigma_2$
 $\epsilon_0 \omega \ll \sigma_1$

$$\nabla \times (-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_1 \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\mu_0 \sigma_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

DAL
Kosten

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \sigma_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ansatz: } \vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \cdot e^{-r/\delta} e^{i\omega t}$$

$$\frac{1}{\delta^2} \vec{E} = i\omega \mu_0 \sigma_1 \vec{E}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{i\omega \mu_0 \sigma_1}} = \sqrt{\frac{-i}{\omega \mu_0 \sigma_1}} \quad f \cdot i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\delta = \frac{1-i}{\sqrt{2}\omega \mu_0 \sigma_1} \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{2}\omega \mu_0 \sigma_1} \Rightarrow \vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}\omega \mu_0 \sigma_1} r} \cdot e^{-i\omega t}$$

exp. Abnahme
Skin-Effekt
Oszillation

(c) $B \propto E$

$$\frac{E_0}{2} = E_0 \cdot e^{-\frac{r}{\delta}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-r/\delta}$$

$$\ln(1/2) = -\frac{r}{\delta} \cdot \ln(e)$$

$$-\delta \cdot \ln(1/2) = r$$

$$r \approx 0.693 \cdot \delta$$

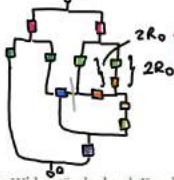
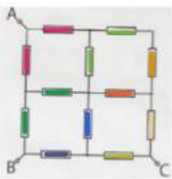
(d) $\delta_{50\text{Hz}} = 1\text{cm}$, $5\text{GHz} = 5 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 50 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^9 \sigma_1}} = 0.01 \text{ m}$$

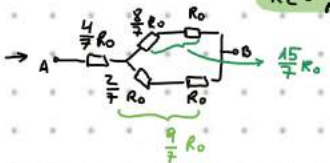
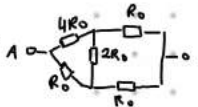
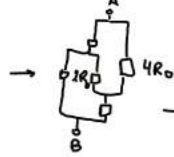
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{10^9}} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^9 \sigma_1}} = \frac{1}{10^9} \cdot 0.01 \text{ m} = 0.01 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$$

2. Widerstandsnetzwerke (12 Pkt.)

- a. Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand zwischen A und B des gezeigten Netzwerks aus Einzelwiderstände R_0 .



parallel: $2R_0$
 Serie: $4R_0$



$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- b. Gilt $R/R_0 = C/C_0$, wenn die Widerstände durch Kondensatoren ausgetauscht werden?

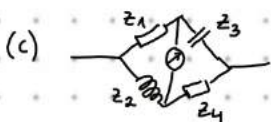
- c. Eine Wheatstone'sche Brücke wird aus 4 Elementen und einem idealen Voltmeter aufgebaut (unteres Bild.) Die Brücke wird mit einer Wechselspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ betrieben. Welche (komplexe) Spannung wird vom Voltmeter angezeigt?

- d. Wann ist diese Spannung 0?

$$\frac{15}{7} R \parallel \frac{9}{3} R = \frac{15 \cdot 9 R^2}{7 \cdot 9 R} = \frac{15 R^2}{7 \cdot 7} = \frac{15 R^2}{49} \approx 0.3 R$$

$$\rightarrow R_{ges} \approx 1.3 R$$

- (b) Nein, weil nicht gleichmäßig Serien- und Parallelschaltung!



$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

$$Z_1 = R \quad Z_3 = -i \frac{1}{\omega C}$$

$$Z_2 = i\omega L \quad Z_4 = R$$

$$U_{\text{Voltmeter}} = U(t) \cdot \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4}$$

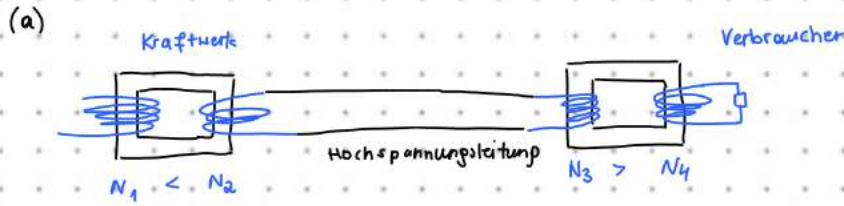
} Formel mit Maschenregel zu finden!

(d) Abgleich: $\frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{|Z_3|}{|Z_4|}$
 $U=0$

$$\frac{R}{i\omega L} = -\frac{i \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow R^2 = -i^2 \frac{\omega L}{\omega C} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

3. Transformatoren, Hochspannungsleitungen und Stromnetz

- Skizzieren Sie den Transport elektrischer Energie vom Kraftwerk zum Verbraucher mittels Transformatoren und einer Hochspannungsleitung. Kennzeichnen Sie, welche Spule eine größere/kleinere Windungszahl hat.
- Wieso verwendet man Hochspannung für den Stromtransport über lange Distanzen?
- Die Durchschlagfestigkeit von Sulfurhexafluorid SF_6 beträgt 7.8 kV/mm . Wie hoch muss eine 390 kV Leitung in diesem Stoff mindestens über dem Boden hängen, damit es nicht zum Überschlag kommt? Wird dieser Mindestabstand größer oder kleiner, wenn man Stickstoff verwendet? Hinweis: $\epsilon_{SF_6} > \epsilon_{Stickstoff}$.
- In einem Umspannwerk soll die Spannung von 390 kV auf (in Japan) haushaltübliche 100 V transformiert werden. Wie verhalten sich die Windungszahlen der Spulen?



(b) $\Delta P_{\text{Leit}} = R_{\text{Leit}} \cdot I^2$, $P_{\text{trans}} = U_{\text{netz}} \cdot I \rightarrow$

$P = U \cdot I = R \cdot I^2$

$\frac{\Delta P_{\text{Leit}}}{P_{\text{trans}}} = \frac{R_{\text{Leit}} \cdot I^2}{U_{\text{netz}} \cdot I} = \frac{R_{\text{Leit}}}{U_{\text{netz}}^2} \cdot P_{\text{trans}} \Rightarrow \Delta P_{\text{Leit}} = \frac{R_{\text{Leit}}}{U_{\text{netz}}^2} P_{\text{trans}}$

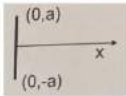
(c) $\frac{7.8 \text{ kV/mm}}{390 \text{ kV}} \Rightarrow \frac{390 \text{ kV}}{7.8 \text{ kV/mm}} = 50 \text{ mm} = 0.5 \text{ m}$

$\epsilon_{\text{Stickstoff}} < \epsilon_{SF_6} \Rightarrow$ Stickstoff hat geringere Durchf. \Rightarrow größerer Mindestabstand

(d) $\frac{390.000}{100} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow N_1 = N_2 \cdot 3900$

4. Elektrostatistisches Feld eines geladenen Drahts

Ein dünner geladener Draht (Linienladungsdichte λ [C/m]) der Länge $2a$ befindet sich symmetrisch zum Koordinatenursprung parallel zur y -Achse.



- Skizzieren Sie das elektrische Feld und die Äquipotentiallinien des Stabes.
- Wie groß ist das elektrische Feld im Ursprung $(0,0)$?
- Bestimmen Sie das elektrische Feld entlang der x -Achse (Symmetrieachse).
Tipp: Berechnen Sie die Ableitung $\frac{d}{dy}$ der Funktion $\frac{y}{x^2 + y^2}$
- Bestimmen Sie das elektrische Feld und das elektrische Potential ϕ sehr nah am Draht ($x \ll a$) und (ii) weit vom Draht entfernt ($x \gg a$).

5. RLC Parallelschwingkreis

- Ein paralleler RLC Schwingkreis wird mit der Spannung $U(t) = U_0(e^{i\omega t} + e^{2ik\omega t})$ betrieben (Einschaltvorgang vernachlässigen). Finden Sie den Gesamtstrom $I(t)$.
- Nun ist $U(t) = 0, t < 0$ und $U(t) = U, t \geq 0$. Finden Sie die Ströme in allen Elementen für $t = 0^+$ (im ersten Moment) und skizzieren Sie diese.

6. Parallele stromdurchflossene Leiter

Zwei zueinander parallele, unendlich lange, dünne Stromleitungen tragen den gleichen Strom I .

- Skizzieren Sie die Magnetfeldlinien.
- Berechnen Sie das Magnetfeld entlang der x -Achse $(x, 0, 0)$.

