1. **Wellen in leitenden Medien**:
   a) Die Bewegungsgleichung für ungebundene, gedämpfte Elektronen (Drude Modell) in einem oszillierenden elektrischen Feld $E(t) = E_0 \exp(-i\omega t)$ lautet
   $$m\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau}\right) = eE(t).$$
   Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $v(t)$ und die (frequenzabhängige) Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$. (*Lösung:* $\sigma(\omega) = Ne^2\tau/(m(1 - i\omega\tau))$)

   b) Ausgehend von der Gleichung $n^2 = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 - i\gamma\omega}$ (Demtröder II, 8.38), leite man einen Ausdruck für die **Leitfähigkeit** $\boldsymbol{\sigma}$, die **Brechzahl** $\boldsymbol{n = n_r - i\kappa}$, den **Absorptionskoeffizienten** $\boldsymbol{\alpha}$ und die **Eindringtiefe** $\boldsymbol{\delta}$ für die Fälle $\boldsymbol{\omega\tau \ll 1 \ll \omega_P\tau}$ (niedrige Frequenzen), $\boldsymbol{1 \ll \omega\tau < \omega_P\tau}$ (hohe Frequenzen, sichtbares Licht) und $\boldsymbol{1 \ll \omega_P\tau < \omega\tau}$ (sehr hohe Frequenzen, UV/Röntgenstrahlen) ab.

   Für Kupfer gilt: $\boldsymbol{\sigma(\omega = 0) = 6 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}}$ und $\boldsymbol{\tau = 2{,}7 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}}$.

   c) Berechnen Sie daraus die **Plasmafrequenz** $\boldsymbol{\omega_P}$ und die zugehörige **Wellenlänge** $\boldsymbol{\lambda_P}$. Was lernt man daraus? (*Lösung:* $\omega_P = 1{,}58 \cdot 10^{16}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\lambda_P = 119\,\mathrm{nm}$)

2. **Übergangsbedingungen**: Eine elektromagnetische Welle mit **$\vec{E}$-Feld in der Einfallebene** fällt auf eine Grenzfläche Luft/Materie mit **Brechungsindex $\boldsymbol{n}$** unter einem **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** ein. Schreiben Sie **alle vier Grenzbedingungen** für die $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder der transmittierten und reflektierten Welle als Funktion des Einfallswinkels $\boldsymbol{\alpha}$. Aus welchen zwei Grenzbedingungen folgt das Snelliussche Gesetz?

3. Anwendung der **Fresnel-Formeln**: Für die senkrecht, beziehungsweise parallel zur Einfallsebene gerichtete Komponente ist das **Reflexionsvermögen** an einer Grenzfläche gegeben durch
   $$R_s = \frac{A_{\mathrm{rs}}^2}{A_{\mathrm{es}}^2} = \left(\frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}\right)^2 \quad \text{und} \quad R_p = \frac{A_{\mathrm{rp}}^2}{A_{\mathrm{ep}}^2} = \left(\frac{n_2\cos\alpha - n_1\cos\beta}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\beta}\right)^2.$$
   a) Wie lautet das Reflexionsvermögen bei senkrechtem Einfall? Es gilt $\boldsymbol{T + R = 1}$.

   b) Wie lautet das Transmissionsvermögen $\boldsymbol{T}$?

   c) Man berechne für $\alpha = 0°$ $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{T}$ an einer Grenzfläche Luft–Glas ($\boldsymbol{n_1 = 1,\ n_2 = 1{,}5}$). (*Lösung:* $R = 0{,}04$, $T = 0{,}96$)

   d) Für welche Beziehung zwischen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ wird $\boldsymbol{A_{rp} = 0}$?

   e) Wie hängt der so ermittelte Einfallswinkel von $\boldsymbol{n_1}$ und $\boldsymbol{n_2}$ ab?

   f) Man berechne diesen Winkel für die Grenzfläche Luft–Glas! (*Lösung:* 56,3°)

4. **Fresnel-Formeln an Metalloberflächen:** Bei der **Reflexion an Metalloberflächen** gilt $\boldsymbol{n_1 = 1}$, $\boldsymbol{n_2 = n' - i\kappa}$.
   a) Man gebe das Reflexionsvermögen für senkrechten Einfall an!

   b) Man berechne $\boldsymbol{R}$ für Aluminium ($\boldsymbol{\lambda = 600\,\mathrm{nm}}$, $\boldsymbol{n' = 0{,}95}$, $\boldsymbol{\kappa = 6{,}4}$).
   (*Lösung:* $R = 0{,}92$)

Bitte wenden ↷

c) Man berechne $\boldsymbol{R}$ für Kupfer ($\boldsymbol{\lambda = 500\,\mathrm{nm}}$, $\boldsymbol{n' = 1{,}031}$, $\boldsymbol{\kappa = 2{,}78}$; $\boldsymbol{\lambda = 1000\,\mathrm{nm}}$, $\boldsymbol{n' = 0{,}147}$, $\boldsymbol{\kappa = 6{,}93}$). Was lässt sich aus diesem Ergebnis folgern? (*Lösung:* $R = 0{,}65$; $R = 0{,}99$)

d) **Hagen-Rubens Grenzfall:** Berechnen Sie den ersten Term der Abweichung zwischen 100 % und der Reflektivität von Metallen in der Näherung $n \approx \kappa \gg 1$ und $\varepsilon \approx i \cdot \sigma_{\mathrm{DC}}/(\varepsilon_0 \cdot \omega)$ (σ_{DC} ist die statische Leitfähigkeit). (*Lösung:* $1 - R \approx 2\sqrt{2\varepsilon_0\omega/\sigma_{DC}}$)

5. **Doppelbrechung**: Berechnen Sie die beiden **Brechungsindizes** ($n = \frac{k \cdot c}{\omega}$) sowie beide **Polarisationen** ($\frac{E_x}{E_y}$) für eine **elektromagnetische Welle entlang der $\boldsymbol{z}$-Richtung** (d.h. $\vec{k} = \begin{pmatrix}0 & 0 & k\end{pmatrix}^\top$) in einem Material mit folgendem dielektrischem Tensor:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die **$\boldsymbol{z}$-Komponente des $\boldsymbol{\vec{E}}$-Vektors darf als 0 angenommen werden** (warum?). Die **Wellengleichung** in diesem Fall lautet: $k^2 \cdot \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \hat{\varepsilon}\vec{E}$.

(*Lösung:* $n_1 = 1$, $n_2 = \sqrt{2}$)

6. **Brechungsgesetz**: Leiten Sie das Snellius'sche Brechungsgesetz für einen Lichtstrahl beim Übergang von einem Medium mit dem **Brechungsindex $\boldsymbol{n_1}$** in ein Medium mit dem **Brechungsindex $\boldsymbol{n_2}$** mittels des Fermat'schen Prinzips her.