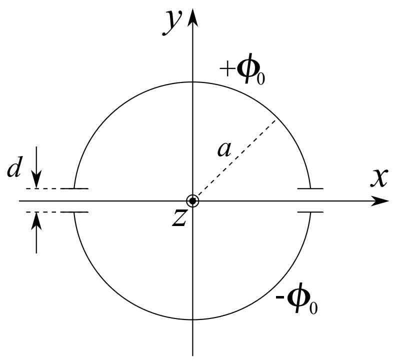
8. Tutorium für 24.05.2024

8.1 Geteilter Kreiszylinder

Ein unendlich langer leitender Kreiszylinder mit verschwindend dünnen Wänden und dem Radius a ist durch einen Schnitt längs seiner Achse in zwei Hälften geteilt, welche voneinander durch einen schmalen Spalt der Breite d, $d \ll a$, isoliert sind und auf den Potenzialen $+\phi_0$ bzw. $-\phi_0$ gehalten werden (siehe Abbildung).



a) Berechne das elektrostatische Potenzial $\phi(R, \varphi)$ für $R < a$.

b) Berechne das elektrostatische Potenzial $\phi(R, \varphi)$ für $R > a$.

c) Berechne die Flächenladungsdichte $\sigma(\varphi)$ auf dem leitenden Zylinder.

d) Berechne die Ladung pro Längeneinheit auf den Kreiszylinderhälften sowie die Kapazität dieser Anordnung pro Längeneinheit.

Anleitung: Der Spalt soll nur bei Punkt (d) berücksichtigt werden, bei den Punkten (a-c) soll er ignoriert werden. Verwende als Ansatz im Inneren ($r < a$)

$$\phi(r, \varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)\right] \left(\frac{r}{a}\right)^m$$

beziehungsweise im Äußeren ($r > a$)

$$\phi(r, \varphi) = A'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A'_m \cos(m\varphi) + B'_m \sin(m\varphi)\right] \left(\frac{a}{r}\right)^m .$$

Verwende ferner die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{2n+1} \frac{\sin\left[(2n+1)\,\varphi\right]}{2n+1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p\sin\varphi}{1-p^2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,\ p^2 \leq 1.$$

Bei Punkt (d) soll der führende Term der Kapazität angegeben werden (Winkelfunktionen im Ergebnis für $d \ll a$ entwickeln).
Hinweis: Beachte, dass $\sin(m\varphi)$ *und* $\cos(m\varphi)$ *ein orthogonales Funktionensystem bilden. Außerdem gilt* $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| + const.$

8.2 Quadratische Spulen

Wir betrachten zwei parallele quadratische Spulen der Seitenlänge a. Durch ihre Zentrum verläuft die z-Achse, orthogonal zu den Spulen. Die zwei Spulen sind im Abstand $2d$ voneinander. Ein Strom der Stärke I fliesst in jeder Spule. Wir betrachten aus Einfachheitsgründen Spulen mit nur einer Windung, i.e. Leiterschleifen.

a) Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{B}(0,0,z)$ entlang der z-Achse.
Hinweis: $\int \frac{\mathrm{x}}{(x^2+c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{c\sqrt{x^2+c}}$ für $c > 0$.

b) Wo verschwindet die erste Ableitung nach z von diesem Feld und wo verschwindet das Feld selbst?

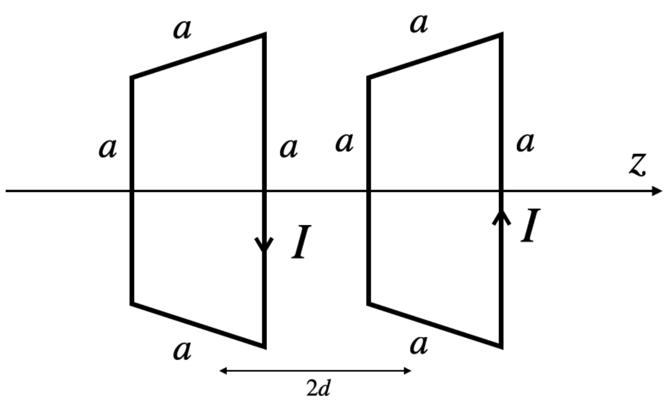


Abbildung 1: Zwei quadratische Spulen

Ankreuzbar: 1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b (jeweils 1 Punkt)