11. Tutorium für 14.06.2024

11.1 Kugelwelle

Das Vektorpotential einer Kugelwelle im Vakuum ist

$$\vec{A} = \frac{D}{r} e^{i(kr-\omega t)} \vec{e}_z \qquad D \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

a) Berechne $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

b) Betrachte nun die Näherung großer Abstände $r \gg \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Kugelwelle ist ("Strahlungszone" bzw. "Fernfeldnäherung"). Berechne $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in dieser Näherung.

c) Berechne die (über eine Schwingungsperiode) zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung pro Raumwinkelelement $\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}$ in der Näherung $r \gg \lambda$ und skizziere das Resultat.

d) Berechne die gesamte abgestrahlte Leistung, wenn $r \gg \lambda$.

11.2 Elliptisch polarisierte Welle

Wir betrachten eine elliptisch polarisierte elektromagnetische Welle im Vakuum mit E-Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = a \sin(kx - \omega t)\, \vec{e}_y + b \cos(kx - \omega t)\, \vec{e}_z \,, \quad a, b \in \mathbb{R}^* \,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie

a) die Phasengeschwindigkeit der Welle. Welcher Zusammenhang muss zwischen k und ω gelten damit die Maxwell Gleichungen im Vakuum erfüllt sind?

b) das B-Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ und die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes;

c) den Poynting Vektor;

d) den zeitlichen Mittelwert des Poynting Vektors.

11.3 Diamonds are forever

Der Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ eines Dielektrikums habe den Wert $n = 1+\sqrt{2}$.[1] Untersuche mit Hilfe der Fresnelschen Formeln, ob es möglich ist, durch Totalreflexion an einer Grenzfläche dieses Dielektrikums ($n_1 = n$) zum Vakuum ($n_2 = 1$) aus linear polarisiertem monochromatischem Licht zirkular polarisiertes monochromatisches Licht herzustellen.

a) Falls der gewünschte Effekt möglich ist: Mit welcher Polarisierungsrichtung bezüglich der Einfallsebene und unter welchem Einfallswinkel φ_1 muss man die Welle auf die Grenzfläche einfallen lassen?

b) Ist dieser Effekt auch für Kronglas ($n \approx 1.5$) möglich?

Anleitung: Nimm an, dass die senkrechten bzw. parallelen Polarisationskomponenten der einfallende Welle E_s bzw. E_p und jene der reflektierenden Welle E_s'' und E_p'' sind. überzeuge dich, dass die Fresnelschen Formeln bei Totalreflexion aufgrund der imaginären Grösse $\cos\varphi_2 = i\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}$ zu einer Phasenverschiebung $E_p''/E_p = \exp(-i\alpha_p)$ mit $\tan(\alpha_p/2) = n\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}/\cos\varphi_1$ führen (und ähnlich für E_s''/E_s mit Phase α_s). Zeige, dass die gesamte Phasenverschiebung $\alpha = \alpha_p - \alpha_s$ mit Hilfe der Additionstheoreme für Tangens geschrieben werden kann als

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\varphi_1\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}{n\sin^2\varphi_1}.$$

Hinweis: Verwende folgende Darstellung der Fresnelschen Formeln:

$$\frac{E_s''}{E_s} = \frac{n_1\cos\varphi_1 - n_2\cos\varphi_2}{n_1\cos\varphi_1 + n_2\cos\varphi_2}, \tag{3}$$

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{n_2\cos\varphi_1 - n_1\cos\varphi_2}{n_2\cos\varphi_1 + n_1\cos\varphi_2}. \tag{4}$$

Beachte, dass eine zirkular polarisierte auslaufende Welle eine Phasenverschiebung $\alpha_p - \alpha_s = \pm\pi/2$ aufweist.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd, 3a, 3b (jeweils 1 Punkt)

[1] Dieser Wert liegt sehr nahe am Brechungsindex von Diamant: $n_{\text{Diamant}} \approx 2.417$ bei einer Wellenlänge von 589 nm (gelbes Licht).