Beispiel 10.1

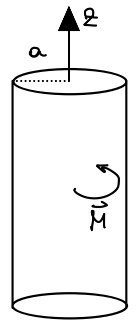
Ein unendlich langer permanent magnetisierter Zylinder mit dem Radius a und der z-Achse als Zylinderachse besitzt die Magnetisierung

$$\vec{M}(r,\varphi,z) = M_0 \frac{r^2}{a^2}\vec{e}_\varphi\,, \qquad M_0 > 0\,, \tag{1}$$

wobei (r,φ,z) Zylinderkoordinaten sind.

a) Berechnen Sie die Magnetisierungsstromdichte $\vec{j}_M$ in Inneren des Zylinders und die Magnetisierungs-Flächenstromdichte $\vec{k}_M$ auf dem Zylindermantel sowie den in z-Richtung fließenden Gesamtstrom.

b) Berechnen Sie im gesamten Raum das vom magnetisierten Zylinder verursachte $\vec{B}$-Feld. Geben Sie ferner für den gesamten Raum das zugehörige $\vec{H}$-Feld an.



$$\vec{M} = M_0 \cdot \frac{r^2}{a^2}\vec{e}_\varphi\,, \quad M_0 > 0$$

a) aus der koordinatenfreien Darstellung der Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{\Phi} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \vec{\Phi}\cdot d\vec{\ell}}{\Delta S}\,\vec{n}$ ergibt sich für Zylinderkoordinaten (mit $g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ und $\vec{\Phi} = \begin{pmatrix}\Phi_r\\ \Phi_\varphi \\ \Phi_z\end{pmatrix}$)

$$\vec{\nabla}\times\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\varphi \Phi_z - \partial_z \Phi_\varphi \\ \partial_z \Phi_r - \partial_r \Phi_z \\ \frac{1}{r}\partial_r(r\Phi_\varphi) - \frac{1}{r}\partial_\varphi \Phi_r \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}_M = c\,\vec{\nabla}\times\vec{M} = M_0\frac{c}{a^2}\cdot\vec{\nabla}\times(r^2\vec{e}_\varphi) = M_0\frac{c}{a^2}\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{r}\partial_r(r^3)\end{pmatrix} = 3M_0\frac{c}{a^2}\,r\,\vec{e}_z$$

$$\vec{k}_M = c\,\underset{\text{nach außen}}{\vec{n}}\times(\vec{M}_2 - \underset{\text{innen}}{\vec{M}_1})\Big|_{r=a} = -c\,\vec{e}_r\times M_0\frac{a^2}{a^2}\vec{e}_\varphi = -M_0\,c\,\vec{e}_z$$

nach außen — außen

Gesamtquerschnitt:

$$\int \vec{j}_M\, d\vec{A} = 2\pi\cdot 3M_0\cdot\frac{c}{a^2}\int_0^a r^2\,dr = 2\pi c\,M_0\cdot a$$

$$2\pi a\cdot k_M = -2\pi c\,M_0\,a$$

$$\Rightarrow I_M^{ges} = 0$$

b) $\vec{M}_{außen} = 0$, $\vec{H}_{außen} = 0$ (da $\vec{j}_F = 0$) $\Rightarrow$ $\vec{B}_{außen} = \vec{H}_{außen} + 4\pi\cdot\vec{M}_{außen} = 0$

$\vec{j} = \vec{j}_M = 3M_0\cdot\frac{c}{a^2}\,r\,\vec{e}_z$, aus Zylindersymmetrie $\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_\varphi$

$$2\pi r\,B(r) = \frac{4\pi}{c}\,2\pi\cdot 3M_0\cdot\frac{c}{a^2}\int_0^r r'^2\,dr' = 8\pi^2 M_0\frac{r^3}{a^2}$$

$$B(r) = 4\pi M_0\cdot\frac{r^2}{a^2} \longrightarrow \vec{B}_{innen} = 4\pi M_0\cdot\frac{r^2}{a^2}\,\vec{e}_\varphi$$

$$H_{innen} = B_{innen} - 4\pi M_{innen} = 4\pi M_0\cdot\frac{r^2}{a^2} - 4\pi M_0\cdot\frac{r^2}{a^2} = 0$$

($\vec{H}_{tangential}$ stetig, da $\vec{k}_F = 0$)