1. Ausgangspunkt

$$\boxed{\rho = j = 0} \qquad \boxed{\epsilon = \text{const.} \qquad \mu = \text{const.}}$$

Somit lauten die Maxwellgleichungen (Gauß-Einheiten):

$$\begin{array}{cc} (a) \quad \text{div}\mathbf{E} = 0 & (b) \quad \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} \\ (c) \quad \text{rot}\mathbf{B} = \frac{\epsilon\mu}{c}\dot{\mathbf{E}} & (d) \quad \text{div}\mathbf{B} = 0 \end{array} \tag{1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(\cos(kz - \omega t)\ \mathbf{e_x} + \sin(kz - \omega t)\ \mathbf{e_y})$$

2. $W = const.$ & Bewegungsgleichung

Auf die Ladung wirkt die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right]$$

Die Bewegungsgleichung lautet somit:

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})\right]} \tag{2}$$

Die zeitliche Energieänderung des Teilchens:

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\ dt$$

$$\Rightarrow \quad \dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \stackrel{!}{=} 0} \tag{3}$$

3. Magnetischer Anteil der Welle

Für die Berechnung des magnetischen Anteils verwenden wir die zweite Maxwellgleichung 1(b). Wegen $E_z = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{e}_y \\ &= -k\ E(\cos(kz - \omega t)\ \mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega t)\ \mathbf{e}_y) \\ &= -k\ \mathbf{E} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Maxwellgleichung ergibt:

$$\dot{\mathbf{B}} = k\ c \cdot \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{k \cdot c \cdot E}{w} \cdot (-\sin(kz - \omega t)\ \mathbf{e}_x + \cos(kz - \omega t)\ \mathbf{e}_y)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}} \tag{4}$$

4. Bestimmung der Teilchenbahn

Setzen wir nun die Lösung für **B** ein:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right)\right] \\ &= q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(\dot{\mathbf{r}} \times \left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}\right)\right)\right] \\ &= q\left[\mathbf{E} + \mathbf{e}_z\ \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}\right)\frac{1}{c} - \mathbf{E}\ \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_z\right)\frac{1}{c}\right] \\ &= q\left[\mathbf{E} + \mathbf{e}_z\ \left(\dot{x} \cdot E_x + \dot{y} \cdot E_y\right)\frac{1}{c} - \mathbf{E}\ \dot{z}\frac{1}{c}\right] \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde die Graßmann-Identität genutzt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Komponentenweise formuliert:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right)\cos(kz - \omega t) \\ \ddot{y} &= \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right)\sin(kz - \omega t) \\ \ddot{z} &= \frac{q}{m \cdot c}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Wegen 3 und $z_0 = 0$ folgt:

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = v_0 = \text{const.} \Rightarrow \boxed{z(t) = v_0 \cdot t} \tag{5}$$

Einmaliges integrieren über die restlichen zwei Komponenten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{qE}{m\omega}\sin\left(\omega \cdot t\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)\right) + \dot{x}_0 \\ \dot{y} &= \frac{qE}{m\omega}\cos\left(\omega \cdot t\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)\right) + \dot{y}_0 \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingungen kann 3 erneut herangezigen werden:

$$0 = \dot{x} \cdot E_x + \dot{y} \cdot E_y$$

$$0 = \frac{qE^2}{m\omega}\left[-\sin(kz - \omega t) \cdot \cos(kz - \omega t) + \cos(kz - \omega t) \cdot \sin(kz - \omega t)\right] + E \cdot \left[\dot{x}_0 \cdot \cos(kz - \omega t) + \dot{y}_0 \cdot \sin(kz - \omega t)\right]$$

$$0 = \dot{x}_0 \cdot \cos(kz - \omega t) + \dot{y}_0 \cdot \sin(kz - \omega t)$$

Diese Bedingung muss für alle t und $\mathbf{r}$ erfüllt sein. Das heißt:

$$\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$$

Somit:

$$\dot{r}(t = 0) = 0 \cdot \mathbf{e}_x + \frac{qE}{m\omega} \cdot \mathbf{e}_y + v_0 \cdot \mathbf{e}_z \tag{6}$$

6. Lösung der Bewegungsgleichung:

Integrieren wir ein weiteres Mal, ergibt sich die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung.

$$x = \frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0 - c}\cos\left(\omega \cdot t\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)\right) + x_0$$
$$y = \frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0 - c}\sin\left(\omega \cdot t\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)\right) + y_0$$

Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) \overset{!}{=} 0 = \frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0 - c} + x_0$$
$$\Rightarrow x_0 = -\frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0 - c}$$
$$y(t=0) \overset{!}{=} 0 = y_0$$

Insgesamt haben wir:

$$\boxed{\mathbf{r(t)} = \begin{pmatrix} \frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0-c}\left[\cos\left(\omega \cdot t\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)\right) - 1\right] \\ \frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0-c}\sin\left(\omega \cdot t\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)\right) \\ v_0 \cdot t \end{pmatrix}} \tag{7}$$

Dabei ist v_0 beliebig. Den Vorfaktor können wir wie folgt zusammenfassen:

$$R = -\frac{qE}{m\omega^2}\frac{c}{v_0 - c} \tag{8}$$

Wenn dieser Term von der ersten Komponente subtrahiert wird, ergibt sich ein Vektor, dessen Norm in der x-y-Ebene wieder R beträgt.

$$(x(t) - R)^2 + (y(t))^2 = R^2. \tag{9}$$

Das Teilchen bewegt sich also in der x-y-Ebene auf Kreisbahnen, deren Mittelpunkt in x-Richtung um den Betrag R verschoben ist.