Beispiel 1

Friday, 1 March 2024 14:32

1.1 Vierervektoren

Gegeben seien Lorentzboosts in x-Richtung $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)$, in y-Richtung $\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')$, sowie Drehungen $D^\mu{}_\nu(\alpha)$ und $D'^\mu{}_\nu(\alpha')$ um die x- und y-Achse:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(D^\mu{}_\nu(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad (D'^\mu{}_\nu(\alpha')) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass im Allgemeinen Lorentzboosts in x- und y-Richtung nicht kommutieren.

a) z.Z.: $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)\,\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta') \neq \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')\,\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma & -\beta'\gamma'\gamma & 0 \\ -\beta\gamma\gamma' & \gamma & \beta\gamma\beta'\gamma' & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma\gamma' & -\beta'\gamma' & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma\beta'\gamma' & \beta\gamma\beta'\gamma' & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeige, dass im Allgemeinen ein Lorentzboost in x-Richtung nicht mit einer Drehung um die y-Achse kommutiert.

z.Z.: $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)\,D'^\mu{}_\nu(\alpha') \neq D'^\mu{}_\nu(\alpha')\,\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\cos\alpha' & 0 & -\beta\gamma\sin\alpha' \\ -\beta\gamma & \gamma\cos\alpha' & 0 & \gamma\sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma\cos\alpha' & \gamma\cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma\sin\alpha' & -\gamma\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

c) Kommutieren im Allgemeinen Elemente der Drehgruppe SO(3)?

Nein. Die Reihenfolge von Drehungen im 3D-Raum spielt eine Rolle für die Endposition. → Drehungen nicht vertauschbar.

d) Kommutieren im Allgemeinen Elemente der Drehgruppe SO(2)?

Ja. Zwei aufeinanderfolgende Drehungen (z. B. um φ und φ') können durch den Gesamtwinkel $\varphi + \varphi'$ beschrieben werden.

$\longrightarrow$ egal ob zuerst Drehung um φ' oder φ

e) Um welche Achse müsste man eine Drehung ansetzen, damit diese stets mit einer Lorentztransformation in y-Richtung kommutiert?

$\longrightarrow$ Drehung um die y-Achse

$$(\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}(\beta')) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Lorentztransformation in y – Richtung

$$(D'^{\mu}{}_{\nu}(\alpha')) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$ Drehung in y– Richtung

$$\begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

$= \checkmark$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & 0 & \sin\alpha' \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & -\sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

1.2 Frische Alfonso-Mangos

Herr G. hat an dem Workshop "Carollian Physics" (das sind Theorien bei denen die Lichtgeschwindigkeit gegen Null geht $c \to 0$) in Indien teilgenommen. Nun begibt er sich auf die Rückreise. In seinem Handgepäck befinden sich frische Alfonso-Mangos, die er wie versprochen seiner Frau mitbringen möchte. Das Flugzeug erhält um 4 Uhr morgendlicher Ortszeit in Mumbai die Starterlaubnis und hat um 12:00 Ortszeit die Landeerlaubnis in Wien Schwechat. Daß Alfonso-Mangos reif sind merkt man daran, daß sie warm werden. Ab diesem Zeitpunkt hat man nur noch 9 Stunden Zeit um sie zu verzehren. Leider tritt bei dem Mitbringsel diese Erwärmung kurz nach dem Start ein. Obwohl Herr G. weiss, daß der reservierte Landungs-slot in Schwechat nicht geändert werden kann, bittet er den Piloten schneller zu fliegen.

a) Warum tut er das?
Welche Mindestgeschwindigkeit hat Herr G. wohl dem Piloten suggeriert?
Wie groß ist der Umweg der dabei in Kauf genommen wird?

- 04:00 in Mumbai ≙ 23:30 in Wien
- Landung um 12:00 in Wien

$\rightarrow$ 12,5 h Flugzeit > 9 h

Das Flugzeug muss so schnell fliegen, dass im bewegten Bezugssystem (Flugzeug) nur 9h vergehen und im ruhenden System (Erde) 12.5h, sodass der Landeslot eingehalten werden kann und die Mangos frisch bleiben.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{9}{12,5}\right)^2} = 0,694$$

$\rightarrow$ 69,4 % der Lichtgeschwindigkeit

≙ 208 048 190 m/s

12,5 h ≙ 45000 s

Umweg: $s = v \cdot t = 0{,}694c \cdot 45000 = 9{,}362 \cdot 10^{12}\,m = 9{,}362 \cdot 10^{9}\,km$

$\frac{s}{s_0} = 1{,}56 \cdot 10^{6}$ - fache Entfernung

$s_0 = 6000\,km$

b) Angenommen wir leben in einer Welt, in der die Lichtgeschwindigkeit c einen anderen Wert hat. Die Distanz zwischen Mumbai und Wien beträgt aber weiterhin 6000 km und das Flugzeug fliegt konstant und direkt mit 500 km/h. Welchen Wert hat die Lichtgeschwindigkeit in dieser Welt höchstens, wenn die Mangos das Ziel erreichen bevor sie überreif sind?

$v = 500\,km/h = 138{,}\dot{8}\,m/s$

$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{12}\right)^2} = 0{,}6614$

$\frac{v}{c} = 0{,}6614 \Rightarrow c = \frac{v}{0{,}6614} = 209{,}88\,m/s = 755{,}33\,km/h$

3)a) $s^2 = \alpha^2 t^2 - x^2$

$\rightarrow$ $s^2 = 0$: $x^2 = \alpha^2 t^2$ $\rightarrow$ $v = \alpha = \text{const.}$

$\rightarrow$ $|\alpha| < c$

$\rightarrow$ $s^2 > 0$: $\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2}$ $\left| \frac{d}{dt} \right.$

$$v_{(t)} = \frac{\cancel{2}\alpha^2 t}{\cancel{2}\sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2}} = \frac{\alpha^2 t}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2}}$$

$\rightarrow$ $v_{(t)} \in \mathbb{C}$ falls $\alpha^2 t^2 < s^2$

$\rightarrow$ nicht physikalisch

$\rightarrow$ $\alpha^2 t^2 = s^2$ $\rightarrow$ $v_{(t)}$ divergiert

$\rightarrow$ $\nexists\, \alpha$: $v_{(t)} < c$ $\forall t$

$\rightarrow$ $s^2 < 0$: $\sigma^2 = -s^2 > 0$: $\sigma^2 = -\alpha^2 t^2 + x^2$

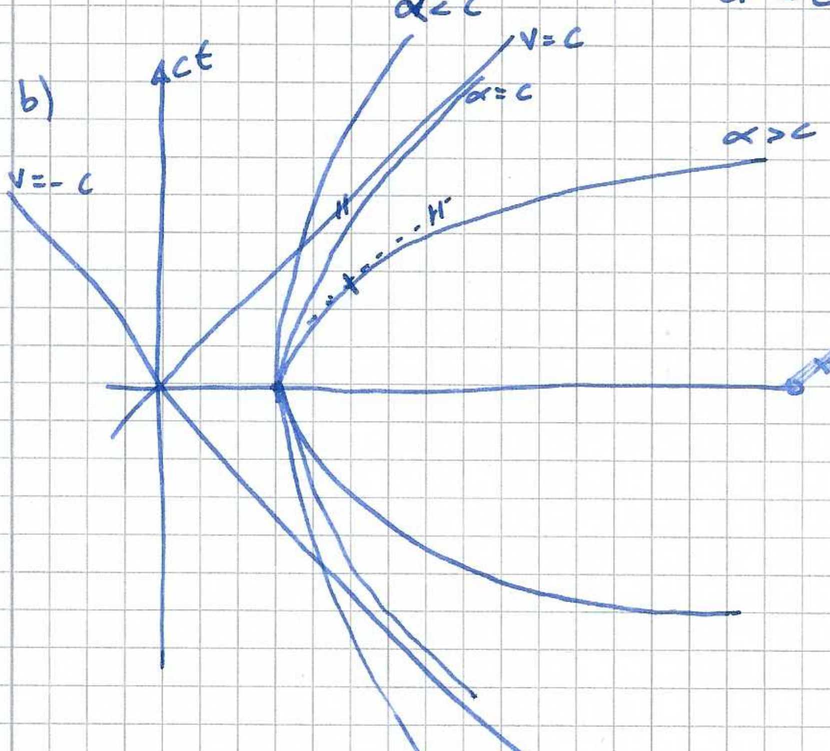
$\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2 t^2}$

$$\rightarrow v_{(t)} = \frac{\cancel{2}\alpha^2 t}{\cancel{2}\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2 t^2}}$$

$\rightarrow$ $v_{(0)} = 0$ ✓ & $v_{(t \to \infty)} = \alpha$

$\rightarrow$ $\alpha \overset{!}{<} c$: $v_{(t)} < c$ $\forall t$

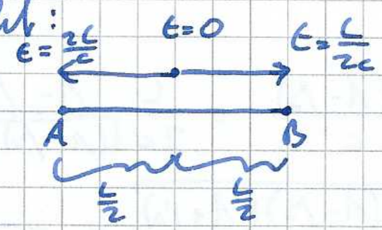
b)



(4) Annahmen:

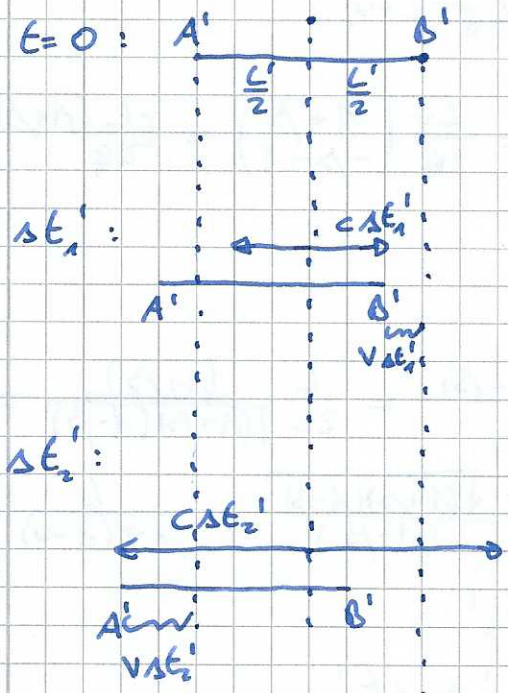
- O: Markierungen gleichzeitig auf unterem Stab auftauchen
- U: Markierungen erfolgen nicht gleichzeitig
- U: größerer Abstand

O Sicht:



→ Lichtblitze kommen gleichzeitig an

U Sicht:



$$\frac{L'}{2} = (c+v)\Delta t_1' \to \Delta t_1' = \frac{L'}{2(c+v)}$$

$$\frac{L'}{2} = (c-v)\Delta t_2' \to \Delta t_2' = \frac{L'}{2(c-v)}$$

$\to v \neq 0 : \Delta t_1' \neq \Delta t_2'$

→ Ereignisse nicht gleichzeitig

alternativ:

(1) Lichtimpuls wird ausgesand

(2) – " – trifft rechts ein

(3) – " – trifft links ein

$\to$ O: 1: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2: $B = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix}$

3: $A = \begin{pmatrix} +\frac{L}{2} \\ - \end{pmatrix}$

$$U:1: \quad x' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2: \quad B' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} = \frac{\gamma L}{2} \begin{pmatrix} 1-\beta \\ -\beta+1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma L (1-\beta)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\,\Delta t_1' \\ x_1' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta t_1' = \frac{\gamma L (1-\beta)}{2c} = \frac{L}{2c} \frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

$$= \frac{L}{2c} \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{(1+\beta)} = \frac{L}{2\gamma c \left(1+\frac{v}{c}\right)}$$

$$= \frac{L}{2\gamma (c+v)}$$

$$3: \quad A' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} \end{pmatrix} = \frac{L\gamma}{2\cancel{c}} \begin{pmatrix} 1+\beta \\ -\beta-1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma L (1+\beta)}{2\cancel{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\,\Delta t_2' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta t_2' = \frac{\gamma L (1+\beta)}{2c} = \frac{L}{2c} \frac{(1+\beta)}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}} =$$

$$= \frac{L}{2c} \frac{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}{(1-\beta)} = \frac{L}{2\gamma(c-v)}$$

$$\rightarrow \Delta t_1' \neq \Delta t_2'$$

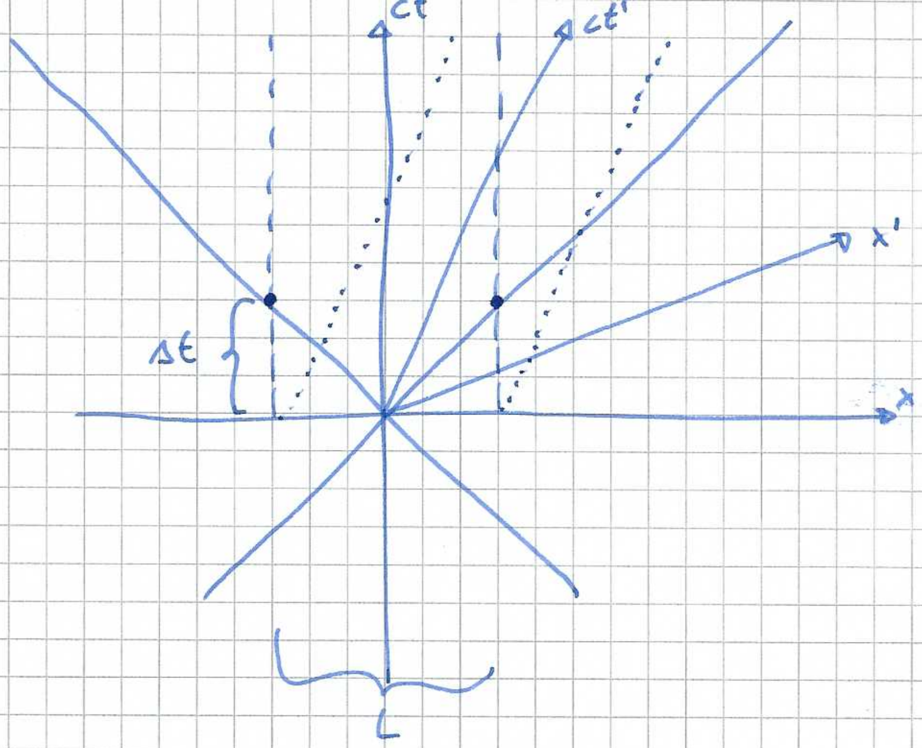
bzw. $\Delta t_1' < \Delta t_2'$

$$L' = x_1' - x_2' = \frac{\gamma L}{2}(1-\beta) - \frac{\gamma L (1+\beta)}{2}(-1) =$$

$$= \frac{\gamma L}{\cancel{2}} (1 - \cancel{\beta} + 1 + \cancel{\beta}) = \gamma L$$

$$\underline{\underline{L' = \gamma L > L}}$$

b) O:



O':