3.1 Umrechnen von Einheiten

a) Schreibe die Minkowski Metrik $\eta_{\mu\nu} = diag(c_0^2, -c_1^2, -c_2^2, -c_3^2)$ in Einheiten, die in der Luftfahrt gebräuchlich sind, so dass das entsprechende Linienelement die Form $ds^2 = c_0^2 dt^2 - c_1^2 dx^2 - c_2^2 dy^2 - c_3^2 dz^2$ annimmt. Bestimme c_0, c_1, c_2 und c_3 unter den folgenden Voraussetzungen: das Linienelement ds wird in Kilometern gemessen, die Zeit wird in Stunden gemessen, die Position des Flugzeugs in horizontaler Richtung wird in Seemeilen angegeben (x- und y-Komponente) und die Flughöhe in Fuß (z-Komponente).
Hinweise: 1 Meter = Lichtgeschwindigkeit/299792458 × Sekunden, 1 Seemeile = 1852 Meter, 1 Fuß = 0.3048 Meter.
b) Von nun an setzen wir $c = 1$ wie in der Vorlesung (bzw. alle $c_\mu = 1$ in der Minkowski Metrik oben), um uns das Leben zu erleichtern.
Bestimme deine Größe in Sekunden, dein Alter in Metern und deine Ruheenergie in Kilogramm.
c) Die Polizei stoppt dein Auto auf der Freilandstraße (Geschwindigkeitsbeschränkung $v \leq 100$km/h) mit einer Geschwindigkeit von $v = 10^{-7}$. Warst du zu schnell unterwegs?

a) $ds^2 = c_0^2 dt^2 - c_1^2 dx^2 - c_2^2 dy^2 - c_3^2 dz^2$

$[dt] = h$, $[ds] = km$, $[dx_i] =$ Seemeilen $(i = x, y)$ $[dz] =$ Fuß

$c_0 = 299\,792{,}458 \frac{km}{s} \cdot 3600 \frac{s}{h} = 1{,}079 \cdot 10^9 \frac{km}{h}$

$c_1 = c_2 = 1{,}852 \frac{km}{\text{Seemeile}}$

$c_3 = 3{,}048 \cdot 10^{-4} \frac{km}{\text{Fuß}}$

b) $c = 1$

$l = 1{,}8\,m = 6 \cdot 10^{-9}\,s = 6\,ns$

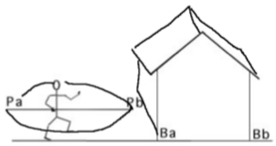
$t = 22a = 2{,}08 \cdot 10^{17}\,m$

$E = 80\,kg \quad (= m_0 c^2)$

c) $v = 10^{-7} \xrightarrow{\cdot c} v = 30 \frac{m}{s} = 108 \frac{km}{h} \geq 100\,km/h$

3.2 Fastenzeit

Herr X hat sich um die Fastenzeit durchzustehen einen Ringbauch mit einem Meter Radius angefuttert, den er nun stolz mit sich herumträgt.



Er rennt nun mit der Geschwindigkeit $v_x = \sqrt{3}c/2$ auf einen Schuppen zu, der laut Hersteller in x-Richtung eine Breite von einem Meter und in y-Richtung eine Breite von drei Metern hat.

a) Berechnen Sie die Länge und Breite des Schuppens im Bezugssystem des Herrn X.
Der vordere Endpunkt des Ringbauchs sei mit P_b und der hintere Endpunkt des Ringbauchs mit P_a zu bezeichnen. Der Eingang und Ausgang des Schuppens sei weiterhin mit B_a und B_b zu bezeichnen.

b) Stellen Sie die Matrix der Lorentztransformation auf. Benennen Sie das Ereignis, wenn P_b auf B_a trifft in beiden Bezugssystemen (Läufer und Schuppen) mit $(t, x) = (0, 0) = (t', x')$. Finden sie in beiden Bezugssystemen die Koordinaten von

- P_b trifft B_b
- P_a trifft B_a
- P_a trifft B_b

c) Beschreiben Sie den Vorgang mit Hilfe von Minkowski-Diagrammen in beiden Bezugssystem und diskutieren Sie in beiden Bezugssystem die Frage: "Passt Herr X in den Schuppen?"

a) $v_x = \frac{\sqrt{3}}{2}c \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = 2$

$l_x' = l_x/\gamma = \frac{1}{2}m \qquad l_y' = l_y = 3m$

b) $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$

P_b auf B_a $\quad (ct, x) = (ct', x') = (0, 0)$

P_b auf B_b $\quad x = 1m \quad ct = \frac{2}{\sqrt{3}}m$

$t' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \gamma\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}m$

$x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0\ m$

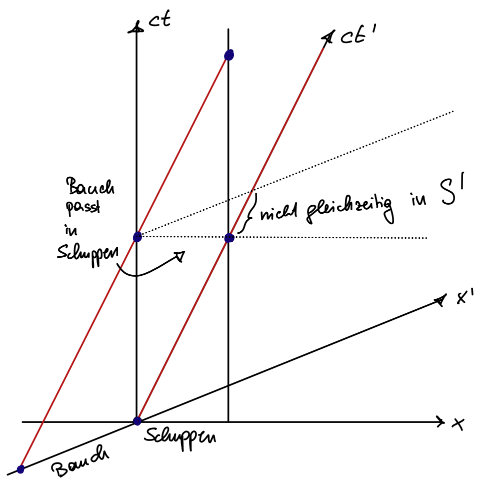
P_a auf B_a $\quad x = 0m \quad ct = \frac{2}{\gamma}\cdot\frac{c}{v} = \frac{2}{\sqrt{3}}m$

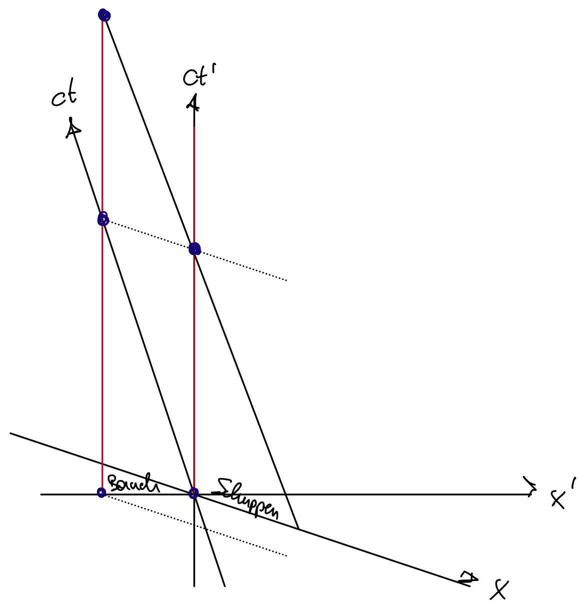
$x' = -2m \quad ct' = \frac{2c}{v} = \frac{4}{\sqrt{3}}m$

P_a auf B_b $\quad x = 1m \quad ct = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}m$

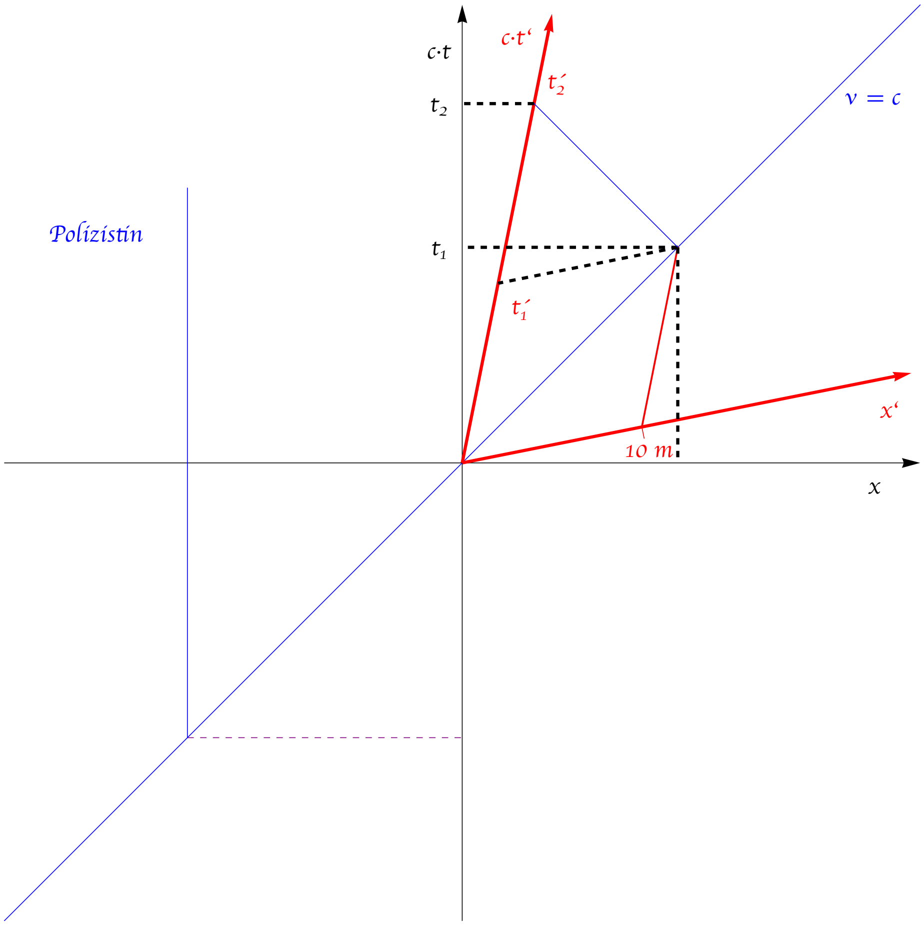
$x' = -2m \quad ct' = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}m$

c)


ct
ct'
Bauch
passt
in
Schuppen
nicht gleichzeitig in S'
x'
x
Schuppen
Bauch


ct
ct'
Bauch
Schuppen
x'
x

3.3 a)



3.3 b)
Im bewegten System S' nähert sich das Licht mit c der Kabine an (Konstanz der c).

$$t'_1 = \frac{10\ m}{c} = 3.336 \cdot 10^{-8} s$$

Lorentz-Transformation liefert:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Mit $v = \frac{c}{5}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{5}{2\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10\ m \\ 10\ m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ct_1 = \frac{25}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}\ m$$

$$t_1 = 4.085 \cdot 10^{-8} s$$

3.3 c)
S':

$$t'_2 = t'_1 \cdot 2 = 6.67 \cdot 10^{-8} s$$

S:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{5}{2\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20\ m \\ 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c \cdot t_2 = \frac{50}{\sqrt{6}}\ m$$

$$t_2 = 6.81 \cdot 10^{-8} s$$

3.4 a)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$c \cdot t' = \gamma \cdot c \cdot t - \beta \cdot \gamma \cdot x$$

$$c \cdot t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(c \cdot t - \beta \cdot x)$$

$$t' \cdot \sqrt{1-\beta^2} = t - \frac{\beta \cdot x}{c}$$

$$t'^2 - t'^2 \cdot \beta^2 - \frac{\beta^2 \cdot x^2}{c^2} - t^2 + \frac{2t\ \beta\ x}{c} = 0$$

$$\beta^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{c^2} - t'^2\right) + \beta \cdot \left(\frac{2tx}{c}\right) + (t'^2 - t^2) = 0$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\frac{2tx}{c} \pm \sqrt{4\frac{t^2x^2}{c^2} + 4 \cdot (\frac{x^2}{c^2} + t'^2) \cdot (t'^2 - t^2)}}{2 \cdot (\frac{x^2}{c^2} + t'^2)}$$

$$\beta_1 = 0.0005996 \qquad , \qquad \beta_2 = 0.001799 \tag{1}$$

Einsetzen von β_2 ergibt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,001799 & 0 & 0 \\ -0,001799 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \cdot 2 \cdot 10^{-10}\ m \\ 50\ m \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ct' = -0.02998\ m$$

In diesem Fall würde sich die Reihenfolge der Ereignisse umkehren (negative Zeitdifferenz).Wir schließen diesen Fall aus.

$$\Rightarrow \beta = \beta_1$$

$$\Rightarrow v = \beta \cdot c = 179751 \frac{m}{s}$$

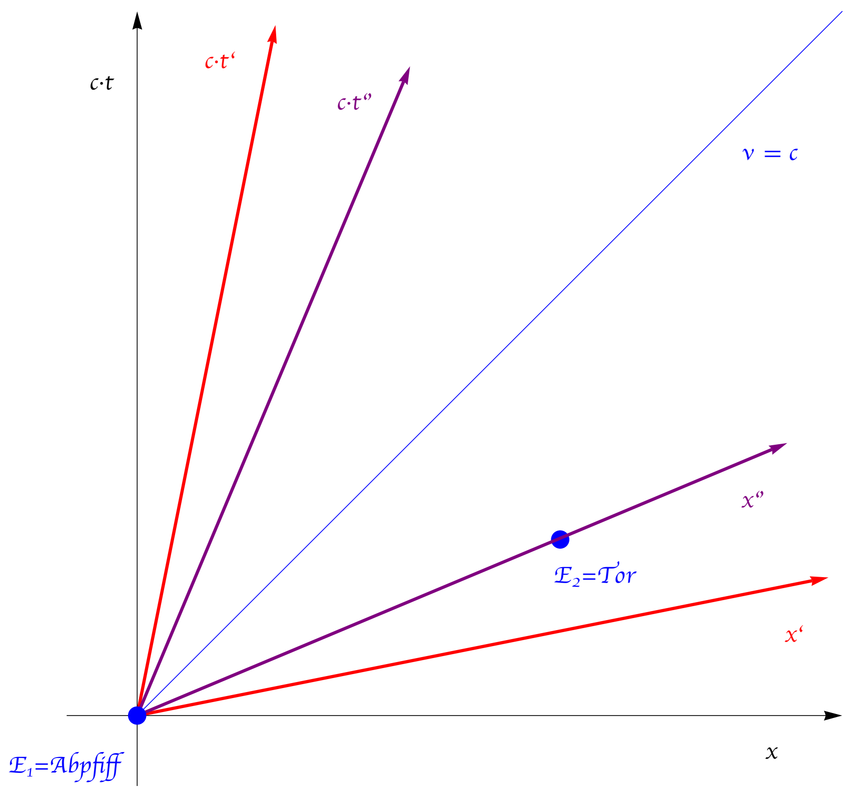
Da wir uns für die Differenz zwischen den beiden Ereignissen (Abpfiff und Tor) interessieren, legen wir den Ursprung beim ersten Ereignis, dem Abpfiff, fest. Somit lauten die Koordinaten:

$$x^{\mu}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{\mu}_{(2)} = \begin{pmatrix} c \cdot 2 \cdot 10^{-10}\ m \\ 50\ m \\ 10\ m \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

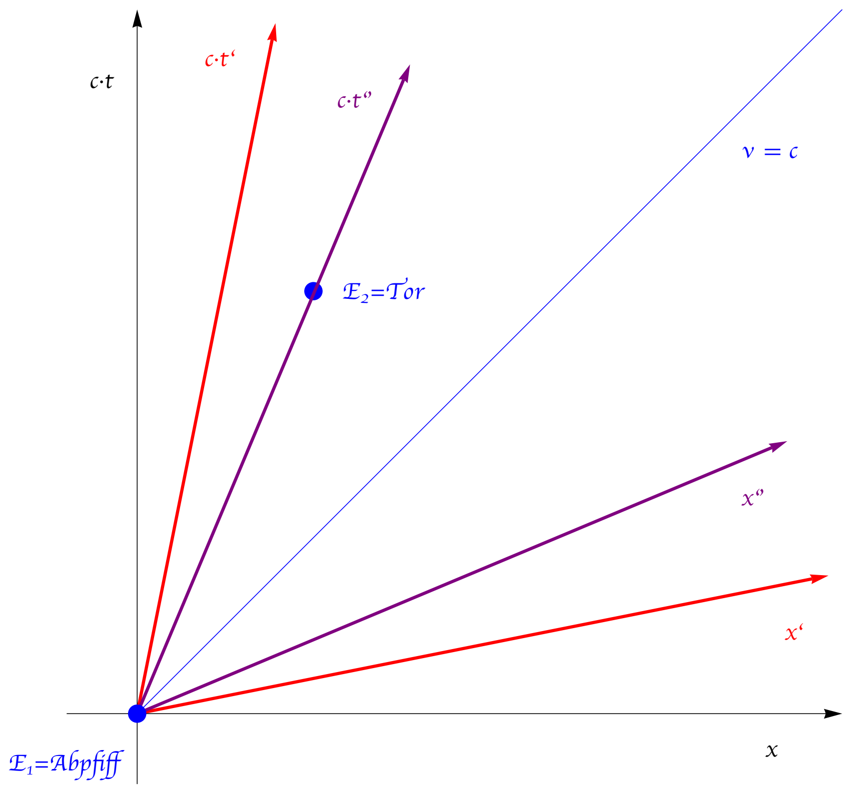
Für die Raumzeit-Trennung $(\Delta s)^2$ folgt:

$$\Delta x^\mu = x^\mu_{(2)} - x^\mu_{(1)} = x^\mu_{(2)}$$
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^i)^2$$
$$i = 1, 2, 3$$

In unserem Fall dominiert die räumliche Differenz: $(\Delta s)^2 < 0$. Die Ereignisse sind also raumartig getrennt. Dementsprechend kann ein System S'' gefunden werden, in dem die Ereignisse simultan auftreten.



In einem Szenario, in dem die Ereignisse zeitartig getrennt sind, lässt sich analog ein Bezugssystem finden, in welchem die Ereignisse am gleichen Ort stattfinden



3.4 b)

Die Lorentz-Kontraktion von Objekten in Bewegungsrichtung wurde bereits vor der Formulierung der Relativitätstheorie durch FitzGerald im Jahre 1889 postuliert und lange Zeit als direkt beobachtbar angenommen. Zusätzlich zu berücksichtigen ist jedoch die endliche Geschwindigkeit des Lichts und die daraus resultierenden Lichtlaufzeiten. Diese Tatsache führt dazu, dass das zu einem bestimmten Zeitpunkt beim Beobachter eintreffende Licht von verschiedenen Stellen eines sich schnell bewegenden Körpers zu unterschiedlichen Zeiten, das heißt, von verschiedenen Positionen des Körpers aus, emittiert wurde. Zusammen mit der Längenkontraktion bestimmt dieser Effekt das endgültige Erscheinungsbild eines Objekts, wobei die Auswirkungen der Laufzeitunterschiede meist größer als die der Lorentz- Kontraktion sind. Zum ersten Mal wurde dieses Problem im Jahr 1924 von Lampa in seinem Artikel "Wie erscheint nach der

Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter” diskutiert. Wahrgenommen wurde das Problem jedoch viel später, durch die Veröffentlichungen von Penrose und Terrell, welche 1959 zeigten, dass eine bewegte Kugel dem Beobachter immer als Kugel erscheint. Darauffolgend wurden mehrere Veröffentlichungen zu diesem Thema gemacht.

Sind wir an der eigentlichen Form der Objekte interessiert und nicht an deren Erscheinungsbild, dann reicht die Überlegung mit der Lorentzkontraktion aus. Jedoch würde die Lorentzkontraktion eines Balles trotzdem keinen Rugbyball ergeben, da die Kontraktion nur in Bewegungsrichtung erfolgt und dadurch eine Asymmetrie induziert wird. Ein Rugbyball hingegen kann sehr wohl die Form einer Kugel annehmen.