EDyn I UE4 SS24

4.3.

a) $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{0\nu}F_0{}^{\nu} - F_{i\nu}F_i{}^{\nu} =$

$= \underbrace{F_{00}F_{00}}_{=0} - \underbrace{F_{0i}}_{E_i}F_{0i} - \underbrace{F_{i0}}_{-E_i}F_{i0} + \underbrace{F_{ij}}_{-\varepsilon_{ijk}B_k}F_{ij} =$

$= -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$

$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \underbrace{F_{00}\tilde{F}_{00}}_{=0} - F_{0i}\tilde{F}_{0i} - F_{i0}\tilde{F}_{i0} + F_{ij}\tilde{F}_{ij} =$

$= F_{ij}\tilde{F}_{ij} - 2F_{0i}\tilde{F}_{0i} =$

$= F_{ij}\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}{}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2F_{0i}\frac{1}{2}\varepsilon_{0i}{}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} =$

$= \frac{1}{2}F_{ij}(\varepsilon_{ij0}{}^{\nu}F_{0\nu} - \varepsilon_{ijk}{}^{\nu}F_{k\nu})$ $\varepsilon^{0123} = +1$

$\Rightarrow \varepsilon_{0123} = -1$

$- F_{0i}(\underbrace{\varepsilon_{0i0}{}^{\nu}}_{=0}F_{0\nu} - \varepsilon_{0ij}{}^{\nu}F_{j\nu}) =$ (→ Bartelmann!) S. 243

$= \frac{1}{2}F_{ij}(\varepsilon_{ij00}F_{00} - \underbrace{\varepsilon_{ij0k}}_{\varepsilon_{0kij}}\underbrace{F_{0k}}_{E_k} - \underbrace{\varepsilon_{ijk0}}_{-\varepsilon_{0kij}}\underbrace{F_{k0}}_{-E_k} + \underbrace{\varepsilon_{ijkl}F_{kl}}_{=0})$

$- \underbrace{F_{0i}}_{E_i}(-\underbrace{\varepsilon_{0ij0}}_{=0}\underbrace{F_{j0}}_{-E_j} + \underbrace{\varepsilon_{0ijk}F_{jk}}_{-\varepsilon_{ijk}F_{jk} = 2B_i})$

$= \ldots = -4\,\vec{B}\cdot\vec{E}$

$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \underbrace{\tilde{F}_{ij}}_{\varepsilon_{ijk}E_k}\tilde{F}_{ij} - 2\underbrace{\tilde{F}_{0i}}_{B_i}\tilde{F}_{0i} = 2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

→ oder: wie oben durch expl. Kontrahieren ...

b) nein, aber andere Invarianten, zB.: $F_{\mu\nu}F^{\nu\alpha}F_{\alpha\beta}F^{\beta\mu}$

c) rein elektrisch: $\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}\cdot\vec{E}=0$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\vec{E}^2 < 0$$

rein magnetisch: $\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{B}\cdot\vec{E}=0$ ✓

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\vec{B}^2 > 0$$ ↯ $\Rightarrow$ nein!

$\exists$ Sys: $\vec{E}=0$? wenn $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ & $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}>0$

$\Rightarrow$ Lorentz-Trafo zu $\vec{E}=0$ möglich

4.4. $x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt}$

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad ds^2 = c\,dt^2 - \sum_i dx_i^2 = c^2 d\tau^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1-\vec{v}^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \gamma$$

a) $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \qquad v^2 = -1$

$$a^\mu = \gamma \cdot \frac{dv^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left[\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}\right] = \gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} \gamma\dot{\gamma} \\ \gamma\dot{\gamma}\vec{v} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix}}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \frac{\vec{v}\vec{a}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}^3} = \vec{v}\cdot\vec{a}\cdot\gamma^3$$

$$\Rightarrow a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4 \vec{v}\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \gamma^4(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 = -\gamma^4\left(\vec{a}^2 + \gamma^2(\vec{v}\vec{a})^2\right)$$

$$j^\mu = \gamma \cdot \frac{da^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left[\gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix}\right] = \gamma\left[\dot{\gamma}\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\gamma}\vec{v} + \dot{\gamma}\vec{a} + \dot{\gamma}\vec{a} + \gamma\vec{j} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(\dot{\gamma}^2 + \gamma\ddot{\gamma}) \\ \gamma\dot{\gamma}^2\vec{v} + \gamma^2\dot{\gamma}\vec{a} + \gamma^2\ddot{\gamma}\vec{v} + 2\gamma^2\dot{\gamma}\vec{a} + \gamma^3\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(\dot{\gamma}^2 + \gamma\ddot{\gamma}) \\ (\gamma\dot{\gamma}^2 + \gamma^2\ddot{\gamma})\vec{v} + 3\gamma^2\dot{\gamma}\vec{a} + \gamma^3\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{a}\,\gamma^3) = \vec{a}^2\gamma^3 + \vec{v}\cdot\vec{j}\,\gamma^3 + \overbrace{\vec{v}\vec{a}\cdot 3\gamma^2\dot{\gamma}}^{3(\vec{v}\vec{a})^2\gamma^5}$$

$$= \gamma^3\left(\vec{a}^2 + \vec{v}\vec{j} + 3(\vec{v}\vec{a})^2\gamma^2\right)$$

4.4.

$$\Rightarrow j^\mu = \begin{pmatrix} \gamma\left(\gamma^6(\vec v\vec a)^2 + \gamma^4\left(\vec a^2 + \vec v\vec J + 3(\vec v\vec a)^2\gamma^2\right)\right) \\ \left(\gamma^7(\vec v\vec a)^2 + \gamma^5\left(\vec a^2 + \vec v\vec J + 3(\vec v\vec a)^2\gamma^2\right)\right)\vec v \\ + 3\gamma^5(\vec v\vec a)\,\vec a + \gamma^3\vec J \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^5\left[\vec a^2 + \vec v\vec J + 4\gamma^2(\vec v\vec a)^2\right] \\ \gamma^3\left[\vec J + 3\gamma^2(\vec v\vec a)\vec a + \gamma^2\left(\vec a^2 + \vec v\vec J + 4\gamma^2(\vec v\vec a)^2\right)\vec v\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^5\left(\vec v\vec J + 3\gamma^2(\vec v\vec a)^2\right) \\ \gamma^3\vec J + 3\gamma^5(\vec v\vec a)\vec a + \gamma^5\left(\vec v\vec J + 3\gamma^2(\vec v\vec a)^2\right)\vec v \end{pmatrix} + a^2 v^\mu$$

=

b) $\vec v = 0 \left[\not\Rightarrow \vec a = 0 \not\Rightarrow \vec J = 0\right]$

$v^\mu = \begin{pmatrix}\gamma \\ \vec 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow j^\mu = \begin{pmatrix} a^2\gamma \\ \gamma^3\vec J \end{pmatrix} \Rightarrow j^2 = a^2\gamma^2 - \gamma^6\vec J^2 \neq \emptyset$$

$$J^\mu = j^\mu - a^2 v^\mu = ↯$$

$$v_\mu J^\mu = \gamma^6\left(\cancel{\vec v\vec J} + 3\gamma^2\cancel{(\vec v\vec a)^2}\right) - \gamma^4\left(\vec v\vec J + 3\gamma^2(\vec v\vec a)^2 + \gamma^2\left((\vec v\vec J) + 3\gamma^2(\vec v\vec a)^2\right)\vec v^2\right)$$

$$\vec v\vec J(1 + \gamma^2\vec v^2) = \cancel{\vec v\vec J}\gamma^2 \qquad 3\cancel{\gamma^2(\vec v\vec a)^2}\gamma^2$$

$$= \emptyset \checkmark$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = -1}$$

4.2 Doppler

Der hellere Stern eines Doppelsternsystems bewegt sich auf einer Kreisbahn (Rotationsachse z) mit Winkelgeschwindigkeit ω und Radius R (gemessen im Schwerpunkt des Doppplersystems). Das Spektrum dieses Sterns enthält eine Linie mit Frequenz f.

- Ein Beobachter B_1 ist sehr weit entfernt in z-Richtung stationiert und bewegt sich mit Geschwindigkeit β auf den Schwerpunkt des Sternensystems zu. Welche Geschwindigkeit und welche Rapidität (die Letztere nur in z-Richtung) hat der hellere Stern für diesen Beobachter?
- Ein Beobachter B_2 ist sehr weit entfernt in x-Richtung stationiert und bewegt sich mit Geschwindigkeit β von dem Schwerpunkt des Sternensystems weg. Welche Geschwindigkeit und welche Rapidität (die Letztere in x-Richtung) hat der hellere Stern für diesen Beobachter? Hierbei kann vereinfachend angenommen werden, dass sich der Beobachter sehr weit weg von dem Sternensystem befindet und dass $t \gg R/c$.
- Skizzieren Sie die Frequenzkurve, die die Beobachter $B_{1/2}$ über eine Periode von der Spektrallinie aufzeichnen.

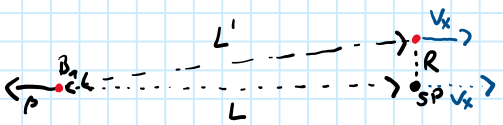
1) $\vec{r} = R\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\cdot\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_{B_1} = R\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\,(-\sin(\omega t)) \\ \frac{1}{\gamma}\cos(\omega t) \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Rapidität: $\theta := \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{c}\right)$

$$\theta_{B_1 z} = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_z}{c}\right) = \operatorname{artanh}\left(-\frac{\beta}{c}\right)$$

2) Beobachter weit weg



$L \mathrel{\hat=} L'$

$\Rightarrow v_x \parallel \beta$ und ca. auf gleicher „Achse"

B_2 bewegt sich vom Schwerpunktsystem mit β weg und Stern bewegt sich mit $v_x = -R\omega\sin(\omega t)$ bezüglich des SPS.

$$\Lambda'(v_{B_2 x}) = \Lambda'(\beta)\Lambda(v_x)$$

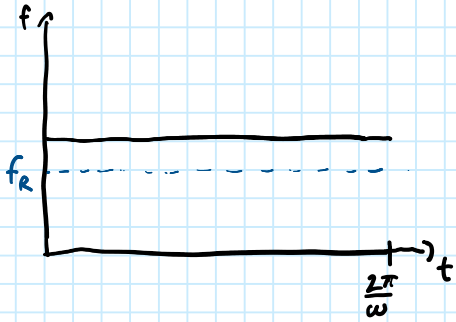
$$v_{B_2 x} = \frac{v_x + \beta}{1 + \frac{v_x \beta}{c^2}} = \frac{(-R\omega\sin(\omega t) + \beta)c^2}{c^2 - R\omega\sin(\omega t)\beta} \mathrel{\hat=} \beta - R\omega\sin(\omega t) \quad (\text{klassisch})$$

$$\vec{v}_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{(-R\omega\sin(\omega t) + \beta)c^2}{c^2 - R\omega\sin(\omega t)\beta} \\ \frac{1}{\gamma}R\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

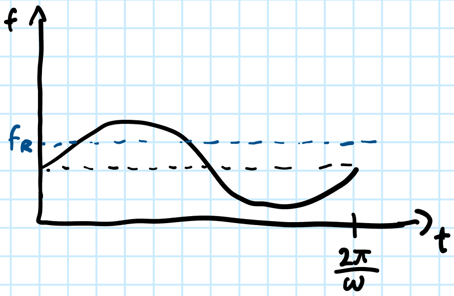
$$\theta_{B_2} = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_{B_2 x}}{c}\right) = \operatorname{artanh}\left(\frac{(\beta - R\omega\sin(\omega t))c}{\ldots}\right)$$

$$\theta_{B_2 x} = \operatorname{artanh}\left(\frac{v_{B_2 x}}{c}\right) = \operatorname{artanh}\left(\frac{(\beta - R\omega \sin(\omega t))c}{c^2 - R\omega \sin(\omega t)\beta}\right)$$

3) B_1

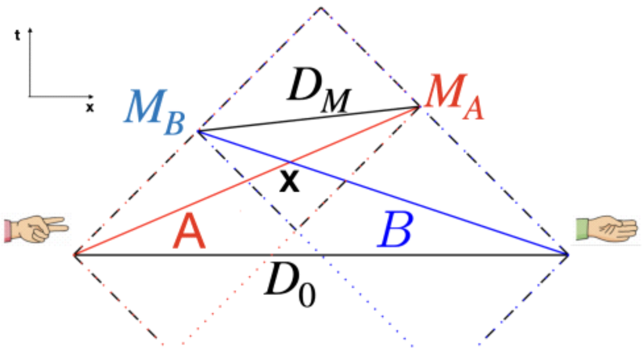


B_2



4.1 Schnick schnack schnuck

Frau Marina Huerta (A) und Herr Horacio Casini (B) spielen interstellares "Schere Stein Papier" auf zwei Planeten die im Ruhesystem den Abstand D_0 haben. Um einen gerechten Spielverlauf zu garantieren haben sie vereinbart sich gleichzeitig ein Lichtsignal mit ihrer Wahl (Schere, Stein, oder Papier) zuzusenden. Natürlich sind beide sehr neugierig und beschließen, gleichzeitig mit dem Absenden der Nachricht, dem Lichtsignal des Gegners heimlich mit Überlichtgeschwindigkeit (jeweils v_A^μ und v_B^μ) entgegen zu fliegen. Der Einfachheit halber legen wir das Ereignis wenn A ihre Wahl abschickt als den Nullpunkt fest.



a) Beide staunen nicht schlecht, als sie sich unterwegs begegnen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Ereignisses X.

b) Berechnen sie die Koordinaten der Ereignisse M_B^μ und M_A^μ, wenn A und B jeweils die Information des Anderen abfangen. Der Raumzeitliche Abstand dieser Ereignisse laute $D_M^\mu = M_A^\mu - M_B^\mu$.

a) Beide Geschwindigkeiten relativ zum selben „Ruhesystem" $\Rightarrow$ keine rel. Geschwindigkeitsaddition

$|v^\mu_A| = v_A$, $|v^\mu_B| = v_B$ $\qquad v_A \cdot t_x + v_B \cdot t_x = D_0 \Rightarrow t_x = \frac{D_0}{v_A+v_B}$, $x_x = t_x \cdot v_A = v_A \frac{D_0}{v_A+v_B}$

$$\Rightarrow x^\mu \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} c \cdot \frac{D_0}{v_A+v_B} \\ v_A \cdot \frac{D_0}{v_A+v_B} \end{pmatrix}$$

b) $v_A \cdot t_A + c \cdot t_A = D_0 \Rightarrow t_A = \frac{D_0}{v_A + c}$, $t_B = \frac{D_0}{v_B + c}$

$x_A = v_A \cdot t_A$ $\qquad x_B = c \cdot v_A$

$\Rightarrow M_A^\mu \mathrel{\hat=} \frac{D_0}{v_A+c}\begin{pmatrix} c \\ v_A \end{pmatrix}$ $\qquad \Rightarrow M_B^\mu \mathrel{\hat=} \frac{D_0}{v_B+c}\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$

$$D_M^\mu = M_A^\mu - M_B^\mu = \frac{D_0}{(v_A+c)(v_B+c)}\begin{pmatrix} c(v_B - v_A) \\ v_A v_B - c^2 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen sie, daß unabhänging von den Geschwindigkeiten $|v_A|, |v_B| > c$ gilt, daß gilt $D_M^2 D_0^2 = A^2 B^2$, wobei A^2 und B^2 die Quadrate der Raumzeitabstände zwischen dem Absenden des eigenen Signals und Abfangen des anderen Signals sind.

Minkowski-Metrik: $g_{\mu\nu} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Minkowski-Metrik: $g_{\mu\nu} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$D_M^2 = D^\mu_M \cdot D_{M\mu} = D^\mu_M \, g_{\mu\nu} \, D^\nu_M = \frac{D_0^2}{(v_A+c)^2(v_B+c)^2}\left(c^2(v_B^2 - 2v_Av_B + v_A^2) - (v_A^2 v_B^2 - 2v_Av_Bc^2 + c^4)\right) =$$

$$= \frac{D_0^2}{(v_A+c)^2(v_B+c)^2}\left(\underbrace{c^2(v_B^2+v_A^2) - v_A^2 v_B^2 - c^4}_{=(c^2-v_A^2)(v_B^2-c^2)}\right)$$

$$A^2 = M_A^\mu \, g_{\mu\nu} \, M_A^\nu = \frac{D_0^2}{(v_A+c)^2}(c^2 - v_A^2)$$

$$B^2 = \left(M_B^\mu - \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}^\mu\right) g_{\mu\nu} \left(M_B^\nu - \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}^\nu\right) = \frac{D_0^2}{(v_B+c)^2}\begin{pmatrix} c \\ -v_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ -v_B \end{pmatrix} = \frac{D_0^2}{(v_B+c)^2}(c^2 - v_B^2)$$

$$A^2 \cdot B^2 = \frac{D_0^4}{(v_B+c)^2(v_A+c)^2}(c^2-v_A^2)(c-v_B^2)$$

$$(D_0)^2 = D_0^\mu D_{0\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix} = -D_0^2 \Rightarrow D_M^2 \cdot (D_0)^2 = \frac{D_0^4}{(v_A+c)^2(v_B+c)^2}(c^2 - v_A^2)(c^2 - v_B^2) = A^2 \cdot B^2$$

d) Nehmen wir nun an, daß $|v_A| = |v_B|$ und berechnen die Kontraktionen mit der euklidischen Metrik. Zeigen sie daß zwar $D_M^2 D_0^2 \neq A^2 B^2$ aber nun gilt daß $X^2 D_M^2 = (M_A - X)^2 D_0^2$.

$$v_A = v_B \Rightarrow D_M^\mu = \frac{D_0}{(v_A+c)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ v_A^2 - c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow D_M^2 = \frac{D_0^2}{(v_A+c)^4}(v_A^2 - c^2)^2$$

$$A^\mu = \frac{D_0}{v_A+c}\begin{pmatrix} c \\ v_A \end{pmatrix}, \qquad B^\mu = \frac{D_0}{v_A+c}\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \frac{D_0^2}{(v_A+c)^2}(c^2+v_A^2) \qquad B^2 = \frac{D_0^2}{(v_A+c)^2}(c^2+v_A^2) \qquad (D_0)^2 = D_0^2$$

$$\Rightarrow A^2 B^2 = \frac{D_0^4}{(v_A+c)^4}(c^2+v_A^2)^2 \neq D_M^2 D_0^2 = \frac{D_0^4}{(v_A+c)^4}(v_A^2 - c^2)^2$$

$$X^\mu = \frac{D_0}{2v_A}\begin{pmatrix} c \\ v_A \end{pmatrix}, \quad M_A^\mu - X^\mu = \frac{D_0}{v_A+c}\begin{pmatrix} c \\ v_A \end{pmatrix} - \frac{D_0}{2v_A}\begin{pmatrix} c \\ v_A \end{pmatrix} = \frac{D_0}{2v_A(v_A+c)}\begin{pmatrix} 2v_Ac - c(v_A+c) \\ 2v_A^2 - v_A(v_A+c) \end{pmatrix} = \frac{D_0}{2(v_A^2+v_Ac)}\begin{pmatrix} v_Ac - c^2 \\ v_A^2 - v_Ac \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \frac{D_0^2}{4v_A^2}(c^2+v_A^2), \quad (M_A - X)^2 = \frac{D_0^2}{4v_A^2(v_A+c)^2}\left((v_Ac - c^2)^2 + (v_A^2 - v_Ac)^2\right) = \frac{D_0^2}{4v_A^2(v_A+c)^2}\left(\underbrace{v_A^2c^2 - 2v_Ac^3 + c^4 + v_A^4 - 2v_A^3c + v_A^2c^2}_{=(v_A^2+c^2)(v_A-c)^2}\right) =$$

$$= \frac{D_0^2}{4v_A^2(v_A+c)^2}(v_A^2+c^2)(v_A-c)^2$$

$$X^2 \cdot D_M^2 = \frac{D_0^4}{4v_A^2(v_A+c)^4}(c^2+v_A^2)\underbrace{(v_A^2-c^2)^2}_{=(v_A+c)^2\cdot(v_A-c)^2} =$$

$$= \frac{D_0^4}{4v_A(v_A+c)^2}\cdot(c^2+v_A^2)(v_A-c)^2 = D_0^2 \cdot (M_A - X)^2$$