3) Aus heiterem Himmel

Ballon Radius $R_0 \Rightarrow$ Oberflächenspannung $\gamma = \frac{dW_m}{dA}$

Elektrostatische Kraft wirkt entgegen

a) Kugeloberfläche $A = 4\pi r^2 \Rightarrow dA = 8\pi r\,dr$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{dW_m}{8\pi r\,dr} \Rightarrow \frac{dW_m}{dr} = 8\pi\gamma r$$

Gauß: radiales E-Feld durch Ladung Q auf Oberfläche (siehe vergangene ÜE) $\Rightarrow$ $\vec{E}(r) = \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$ für $r > R_0$

Elektrische Energie

$$dW_{el} = \frac{1}{8\pi}|\vec{E}|^2 dV = \frac{1}{2}|\vec{E}|^2 dr\,r^2 \Rightarrow \frac{dW_{el}}{dr} = \frac{Q^2}{2r^2}$$

mit $\vec{F} = q\vec{E}$, $W = q\phi$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

$$\Rightarrow \vec{F} = -q\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}W \Rightarrow F_r = \frac{-dW}{dr}$$

(eigentlich $-$) (Richtung aber so nicht ersichtlich)

Kraft durch Oberflächenspannung nach innen gerichtet radial

$$F_{r,m} = -8\pi\gamma r \quad (-\vec{e}_r) \qquad < 0$$

Kraft durch elektrostatische Ausdehnung nach außen gerichtet

$$F_{r,el} = \frac{Q^2}{2r^2} \quad (+\vec{e}_r) \qquad > 0$$

Kräftegleichgewicht bei Radius R' der sich einstellt

$$\Sigma F_r = 0 \Leftrightarrow \frac{dW_{el}}{dr} = \frac{dW_m}{dr} \Rightarrow R' = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\gamma}}$$

oder Gesamtenergie berechnen

$$W = \frac{1}{2}\int_r^\infty \frac{Q^2}{r'^2}dr' + \int_0^r 8\pi\gamma r'\,dr' = \frac{Q^2}{2r} + 4\pi\gamma r^2$$

Elektrostatische: Energie im Ballon, da er sich nicht weiter bis unendlich ausdehnt $\Rightarrow$ von r bis ∞

Oberflächen: Energie im Ballon, da er sich nicht weiter bis 0 (implodieren) zusammenzieht

$\Rightarrow$ von 0 bis r

Energieminimum stellt sich ein bei R'

$$\Rightarrow \frac{dW}{dr} = 0 \Rightarrow R' = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\varphi}}$$

b) Maxwell-Spannungstensor des Magnetfelds $(B_i = 0)$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}^2\right]$$

bleiben in Kugelkoordinaten: $E_i = \frac{Q}{r^2} e_{r_i}$, $\vec{e}_r = e_{r_i}$

E-Feld nur ungleich 0 für $r > R_0$

$$\Rightarrow T_{ij} = \frac{Q^2}{8\pi r^4}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

für $r > R_0$

nur Diagonaleinträge, da $E_\varphi = E_\theta = 0$

wobei $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & \varphi & \theta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ r \\ \varphi \\ \theta \end{array}$

c) Oberflächenintegral über Außenhaut von Ballon $\Rightarrow$ Kraft, kurz nach Einschlag: $r = R_0$

$$F_j = \int_{\partial V} dA_i\, T_{ij} = \int_A dA\, e_{r_i} T_{ij} = \int_A \frac{Q^2}{8\pi R_0^{\cancel{4}2}} \cancel{R_0^2}\, d(\cos\theta)\, d\varphi\, e_{r_j}$$

mit $e_{r_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Kugelkoordinaten

$$\Rightarrow F_j = \frac{Q^2}{8\pi R_0^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e_{r_j}\, d(\cos\theta)\, d\varphi \quad , \quad e_{r_j} = e_{r_j}(\varphi, \theta)$$

Parametrisierung Oberfläche $\vec{r} = R_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = R_0 \vec{e}_r$

e_r daher keine Konstante bezüglich der Integration

$\Rightarrow$ keine Kugelkoordinaten in Integrand

$\Rightarrow$ mit $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \cos\theta \, d(\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow F_z = 0$ //

aufgrund elektrischer Ladung auf Oberfläche

a) radialer Impulsstrom (Kraft) $> 0 \Leftrightarrow F_r = -\partial_r W > 0$

Ballon dehnt sich aus

c) gesamter Impulsstrom $= 0 \Leftrightarrow \Sigma \vec{F} = 0$ in Schwerpunkt

$\Rightarrow$ keine Bewegung des Schwerpunktes (Mitte Ballon)

3) Ergänzungen

$$\vec{F} \sim \int_{\partial V} \vec{e}(x)\, d^2x \quad ; \quad \vec{F}, \vec{e}_k \in \mathbb{R}^3 ; \quad x, x' \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{F} = F_k \vec{b}_k \Rightarrow F_k = \vec{b}_k \vec{F} \quad ; \quad k = 1,2$$

Komponente durch Projektion von Vektor auf Basiselement

$$\Rightarrow F_k = \vec{b}_k \vec{F} \sim b_k(x') \int_{\partial V} \vec{e}(x)\, d^2x$$

in unserem Fall $d^2x = d\theta\, d\varphi \Rightarrow x = \theta, \varphi$ (Kugelkoordinaten)

$$F_k \sim \int_{\partial V} \vec{b}_k(x')\, \vec{e}(x)\, d^2x$$, nur möglich wenn $x' \neq x$ also $x' \neq \theta, \varphi$

mit $\vec{b}_k(x')$ in kartesischen Koordinaten zB möglich

$$\Rightarrow F_k \sim \int_{\partial V} \vec{b}_k(x')\, e_j(x)\, \vec{a}_j(x)\, d^2x \quad ; \quad j = 1,2$$

$\vec{b}_k(x') \cdot \vec{a}_j(x) = \delta_{kj}$; $\forall k,j$ nur wenn $x' = x$ (gleicher Ort) und gleiche Basis

$\Rightarrow \vec{e}(x)$ muss in zB kartesische Koordinaten zerlegt werden !

$$F_k \sim \int_{\partial V} e_j(x)\, \delta_{kj}\, d^2x = \int_{\partial V} e_k(x)\, d^2x$$

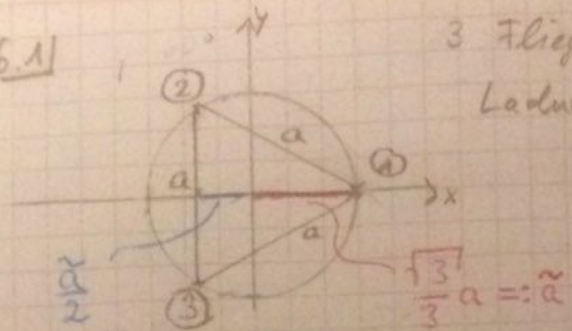
unser Fall: $F_k \sim \int_{\partial V} e_k(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi = 0$

mit $\begin{pmatrix} e_1(\theta,\varphi) \\ e_2(\theta,\varphi) \\ e_3(\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ und $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Edyn I

Tutorium 6

6.1



3 Fliegen sitzen an ①, ②, ③ mit Ladung q_f und Masse m_f

Verwende Zylinderkoordinaten

$$\vec r = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die Ladungen befinden sich an $\vec r_i = \tilde a \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 60°$, $\varphi_3 = 120°$

$$\vec E = q_f \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec r - \vec r_i}{|\vec r - \vec r_i|^3} =$$

$$= q_f \left[\frac{(r\cos\varphi - \tilde a, r\sin\varphi, z)^T}{\left[(r\cos\varphi - \tilde a)^2 + (r\sin\varphi)^2 + z^2\right]^{3/2}} + \frac{(r\cos\varphi + \frac{\tilde a}{2}, r\sin\varphi - \frac{a}{2}, z)^T}{\left[(r\cos\varphi + \frac{\tilde a}{2})^2 + (r\sin\varphi - \frac{a}{2})^2 + z^2\right]^{3/2}} + \frac{(r\cos\varphi + \frac{\tilde a}{2}, r\sin\varphi + \frac{a}{2}, z)^T}{\left[(r\cos\varphi + \frac{\tilde a}{2})^2 + (r\sin\varphi + \frac{a}{2})^2 + z^2\right]^{3/2}} \right]$$

Wo verschwindet $\vec E$ oder einzelne Komponenten?

- Lösung über Symmetrieüberlegungen + exemplarisches einsetzen

a) $\vec E = \vec 0$ nur am Ursprung

$$\vec E(\vec r = \vec 0) = q_f \left[\frac{(-\tilde a, 0, 0)^T}{\tilde a^3} + \frac{(\frac{\tilde a}{2}, -\frac{a}{2}, 0)^T}{\underbrace{\left(\frac{\tilde a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}_{\tilde a^3}} + \frac{(\frac{\tilde a}{2}, \frac{a}{2}, 0)^T}{\underbrace{\left(\frac{\tilde a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}_{\tilde a^3}} \right] = \vec 0$$

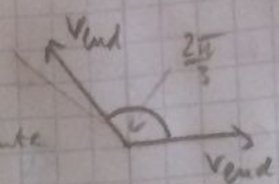
b) für $z=0$ und entweder $x=0$ (oder eine andere der Seitensymmetralen* im Dreieck) zeigt das $\vec E$-Feld nur in x-Richtung (bzw in Richtung der entsprechenden Ladung)

c) - in der gesamten x,y-Ebene ($z=0$) ist $E_z = 0$

- für die $x = 0$ (bzw die Seitensymmetralen im Dreieck) Ebenen verschwindet die y-Komponente (bzw. die senkrecht zur Seitensymmetrale)

* beim gleichseitigen Dreieck: Seitensymmetrale = Winkelhalbierende

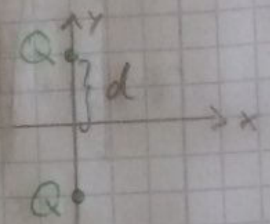
d) $W^{el} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_f}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \boxed{3 \cdot \frac{q_f^2}{a}}$



e) Jede Fliege bewegt sich in Richtung ihrer jeweiligen Seitensymmetralen bis ins Unendliche, dabei wird die gesamte elektrische Energie in Bewegungsenergie umgewandelt

$W^{el} = 3 \cdot \frac{1}{2} m_f v_{end}^2$ $\quad v_{Rel} = v_{end} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \right| = v_{end} \sqrt{1 - 2\cos\frac{2\pi}{3} + 1}$

$v_{end} = \sqrt{\frac{2 q_f^2}{m_f a}}$ $\quad \boxed{v_{Rel} = v_{end} \sqrt{3}}$



6.2 a) $\vec{E} = Q \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y-d \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{3/2}} + \begin{pmatrix} x \\ y+d \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{3/2}} \right]$

$\vec{E}(\vec{0}) = Q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{d^3} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{d^3} \right] = 0 \quad \square$

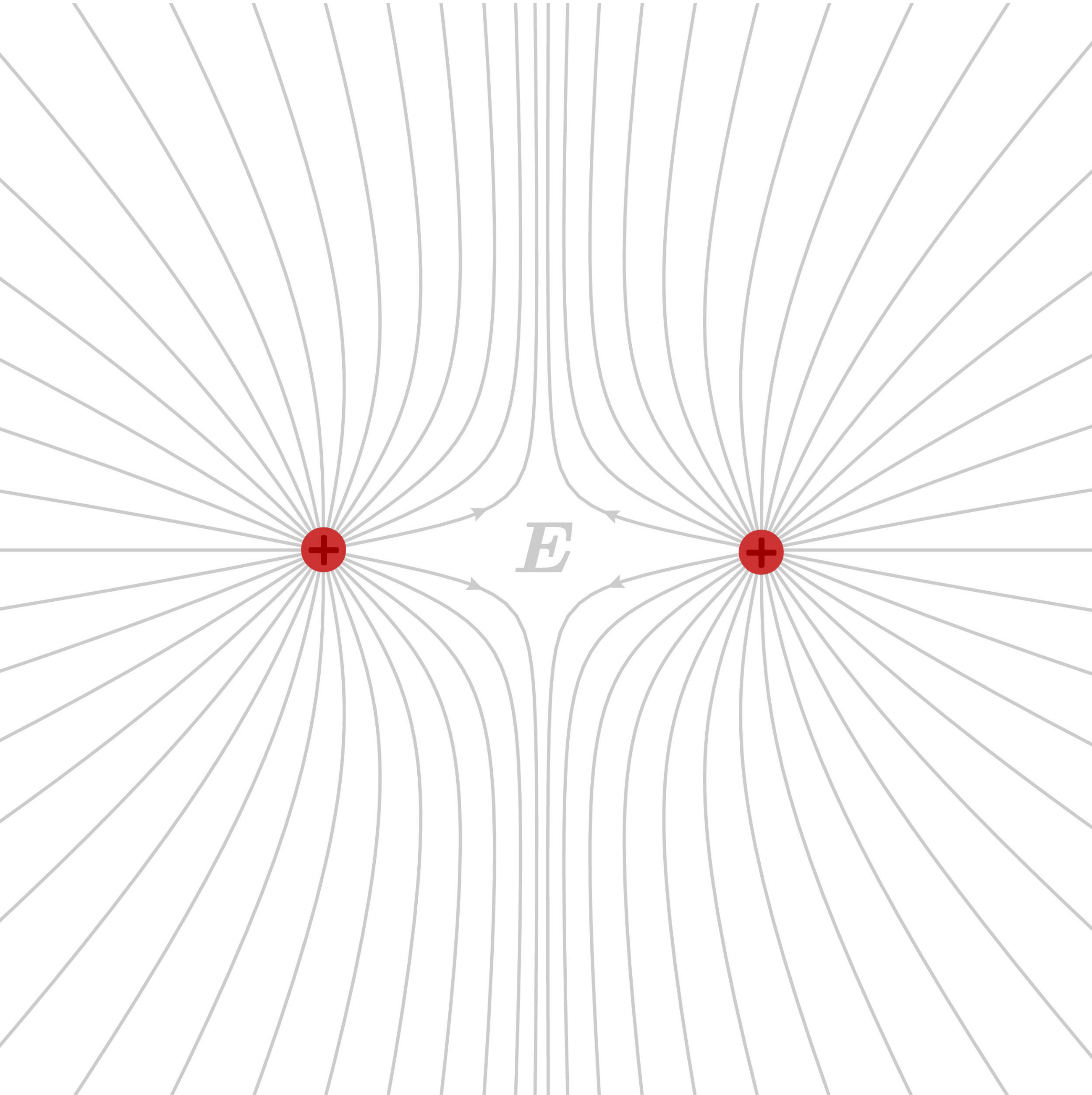
b) Instabile Richtungen: für $qQ > 0$: x-Richtung, z-Richtung (alle normal auf y stehenden Richtungen)
für $qQ < 0$: y-Richtung

$\vec{F}\Big|_{\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \vec{E} \cdot q\Big|_{\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = qQ \left[\begin{pmatrix} \varepsilon \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{[\varepsilon^2 + d^2]^{3/2}} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{[\varepsilon^2 + d^2]^{3/2}} \right] = \frac{2\varepsilon\, qQ\, \hat{e}_x}{[\varepsilon^2 + d^2]^{3/2}}$

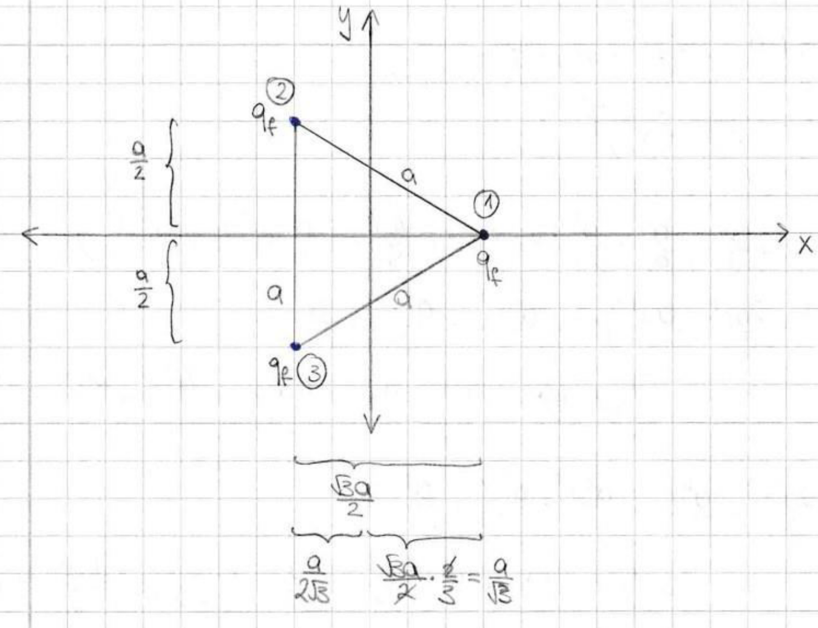
erzeugt Schwingung bei $qQ < 0$ wegen rücktreibender Kraft

$\vec{F}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} = q\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} = qQ \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta - d \\ 0 \end{pmatrix}}_{<0} \underbrace{\frac{1}{[(\delta - d)^2]^{3/2}}}_{>0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta + d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(\delta + d)^3} \right] =$

$= qQ \left[-\begin{pmatrix} 0 \\ d - \delta \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(d - \delta)^3} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(d + \delta)^2} \right] = -qQ\hat{e}_y \left[\frac{1}{(d - \delta)^2} - \frac{1}{(d + \delta)^2} \right]$


E

addendum 6.1 a)



Ladungen bei:

$\vec{r}_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)^T$

$\vec{r}_2 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{2}, 0\right)^T$

$\vec{r}_3 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}, 0\right)^T$

$\Rightarrow$ elektrisches Feld:

$$\vec{E}(x,y,z) = q_f \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} =$$

$$= q_f \cdot \left[\frac{1}{\left[\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x-\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\left[\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ y-\frac{a}{2} \\ z \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left[\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y+\frac{a}{2}\right)^2 + z^2\right]^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ y+\frac{a}{2} \\ z \end{pmatrix} \right]$$

Annahme: es gibt einen Punkt / Punkte auf der x-Achse, an denen das elektrische Feld komplett verschwindet, d.h. $\vec{E}(x, y=0, z=0)\big|_{x=x_0} = \vec{0}$

$$\vec{E}(x, y=0, z=0) = q_f \left[\frac{1}{\left(\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x-\frac{a}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\left(\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ +\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= q_f \left[\frac{x-\frac{a}{\sqrt{3}}}{\left|x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right|^3} + \frac{2x+\frac{a}{\sqrt{3}}}{\left(\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \right] \cdot \hat{e}_x$$

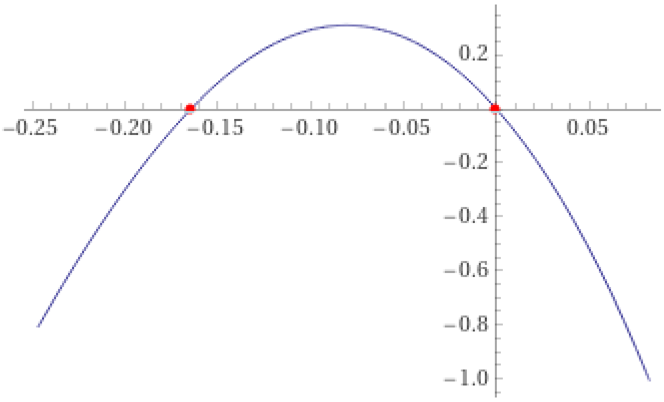
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sign}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-x\right)^2} + \frac{2x+\frac{a}{\sqrt{3}}}{\left(\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} = 0$$

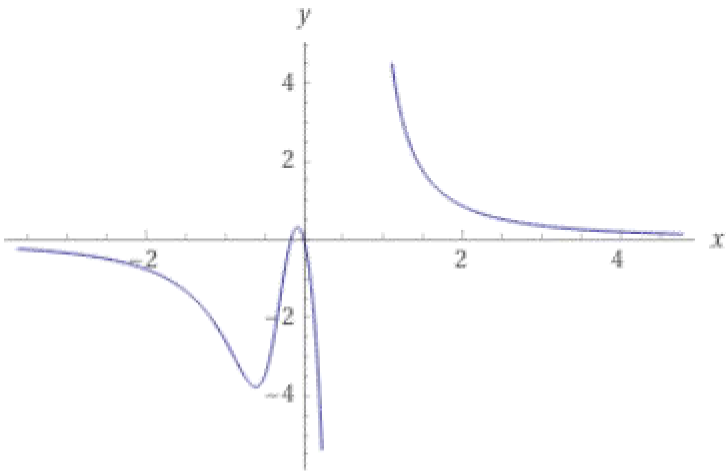
$$\frac{\operatorname{sign}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{x}{a}\right)^2 \cdot a^2} + \frac{\left(2\frac{x}{a}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot \cancel{a}}{\left(\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2} \cdot a^{\cancel{3}/2}} = 0 \quad \Big| \quad \tilde{x} := \frac{x}{a}$$

$$\frac{\operatorname{sign}\left(\tilde{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\tilde{x}\right)^2} + \frac{2\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\tilde{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}} = 0$$

Input:

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left|x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^3}+\frac{2\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1^2}{4}\right)^{3/2}}=0$$



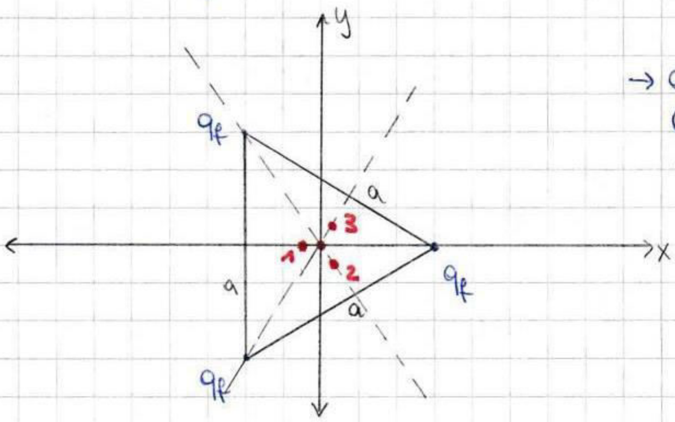


Solutions:

$x = 0$

$x \approx -0.164382$

→ zwei reelle Lösungen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -0{,}164382 \cdot a := -c$



→ aus Symmetriegründen sind auch die Punkte 2 und 3 Lösungen für $\vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}164382a \cdot \cos(\pi) \\ 0{,}164382a \cdot \sin(\pi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot \cos(\pi) \\ c \cdot \sin(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} c \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c/2 \\ -\sqrt{3}c/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} c \cdot \cos(\pi/3) \\ c \cdot \sin(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c/2 \\ \sqrt{3}c/2 \end{pmatrix}$$