Plattenkondensators

a) E-Feld, Potential, Ladung

Berechnung des elektrischen Feldes mittels Gauss'schem Gesetz

Für eine unendlich ausgedehnte Platte mit der Flächenladungsdichte σ verwenden wir ein zylindrisches Gaußsches Volumen, dessen Achse senkrecht zur Platte steht:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2A = 4\pi \cdot Q_{\text{in}} = 4\pi \cdot \sigma A \quad \Rightarrow \quad E = 2\pi\sigma$$

Bestimmung des Potentials durch Lösung der Laplace-Gleichung

Wir nehmen an, dass die Platten jeweils eine große Fläche A relativ zum Abstand L haben.

$$\sqrt{A} \gg L$$

Dies gibt uns eine Symmetrie: die Translationsinvarianz in Richtungen parallel zu den Platten. Die gesuchten Größen hängen damit nicht von den seitlichen Koordinaten x, y ab. Das Potential und das elektrische Feld haben die Form:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(z) \qquad , \qquad \vec{E}(\vec{r}) = E_z(z) \cdot \hat{z}$$

Aufgrund dieser Symmetrie, können wir das Ergebnis aus dem ersten Schritt für das elektrische Feld verwenden. Das Potential muss im Zwischenraum die Laplace-Gleichung erfüllen:

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi(z) = 0$$
$$\Rightarrow \phi(z) = C_1 z + C_2$$

Die Randbedingungen $\phi(0) = \phi_1 = const.$ und $\phi(L) = \phi_1 + U$ geben uns:

$$\phi(z) = \frac{U}{L}z + const.$$

Berechnung des elektrischen Feldes aus dem Potential

Das elektrische Feld ist der negative Gradient des Potentials:

$$E = -\frac{d\phi}{dz} = -\frac{U}{L}$$

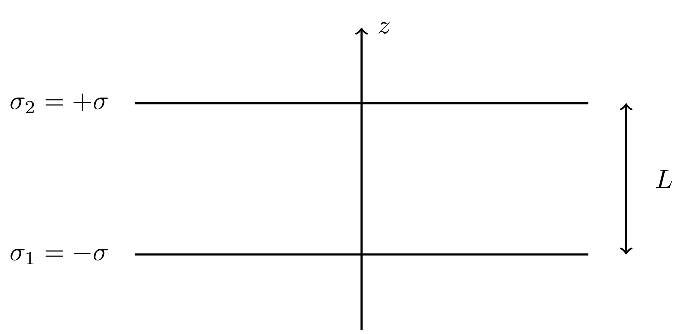
Berechnung der Ladung aus Ladungserhaltung

Unter Berücksichtigung von $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ und $\sigma_1 = -\sigma_2$ sowie der Symmetrie im Kondensator:

$$E = 2\pi(\sigma_1 - \sigma_2) = -4\pi\sigma$$

Durch Vergleich mit $E = -\frac{U}{L}$ folgt:

$$-4\pi\sigma = -\frac{U}{L} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{U}{4\pi L}$$



b) Kapazität

Für die Spannung folgt:

$$U = -\int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi \cdot \frac{Q}{A} \cdot L$$

Einsetzen in die Definition der Kapazität ergibt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{L}$$

c) Gespeicherte Energie im Kondensator

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V dV' \vec{E}(\vec{r'})^2 = 2\pi\sigma^2 \int_V dV' = 2\pi\sigma^2 \cdot AL = 2\pi \frac{Q^2}{A} L = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

7.2 Energie-Impuls-Tensor

Für verschwindende Quellen ($j^\nu = 0$) bekommt man die Gleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, wobei $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor ist. Man setze $\nu = 0$ und bekommt

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{i0} \ , \quad i = 1, 2, 3 \ . \tag{1}$$

a) Drücken Sie $\partial_0 T^{00}$ und $\partial_i T^{i0}$ durch die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes aus.

b) Verwenden Sie dann die Maxwell-Gleichungen in Dreierschreibweise, um (1) zu überprüfen.

$$T^{00} = w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi}\,(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)\,, \tag{18.93}$$

$$T^{0i} = c(\boldsymbol{g}^{\mathrm{em}})_i = T^{i0} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{S})_i = \frac{1}{4\pi}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_i\,,$$

$$T^{ij} = -(\mathbf{T})_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left(E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)\right).$$

a) $\partial_0 T^{00} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}(\vec E^2 + \vec B^2)\right) = \frac{1}{8\pi c}\left(2\vec E\,\frac{\partial \vec E}{\partial t} + 2\vec B\,\frac{\partial \vec B}{\partial t}\right)$

$\partial_i T^{i0} = \partial_i\left(\frac{1}{4\pi}(\vec E\times\vec B)^i\right) = \frac{1}{4\pi}\partial_i\left(\varepsilon^{ijk}E_j B_k\right) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon^{ijk}\left(B_k\,\partial_i E_j + E_j\,\partial_i B_k\right)$

$= \frac{1}{4\pi}\left(B_k\underbrace{\varepsilon^{kij}\,\partial_i E_j}_{\nabla\times\vec E} - E_j\underbrace{\varepsilon^{jik}\,\partial_i B_k}_{\nabla\times\vec B}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\vec B(\nabla\times\vec E) - \vec E(\nabla\times\vec B)\right)$

b) III) $\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t}$

IV) $\nabla\times\vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t}$, $(j^\nu = 0)$

$\Rightarrow \partial_0 T^{00} = \frac{1}{4\pi\cdot c}\left(\vec E(c\cdot\nabla\times\vec B) + \vec B(-c\cdot\nabla\times\vec E)\right)$

$= \frac{1}{4\pi}\left(\vec E(\nabla\times\vec B) - \vec B(\nabla\times\vec E)\right) = -\partial_i T^i$

7.3 Multipolmomente eines speziellen Quadrates

Wir betrachten ein Quadrat der Seitenlänge a. Die obere Hälfte (mit $y > 0$) hat eine Flächenladungsdichte σ und die untere Hälfte (mit $y < 0$) eine Flächenladungsdichte $\varepsilon\sigma$, wobei $\varepsilon^2 = 1$.

a) Erwartet man für $\varepsilon = -1$ eine Gesamtladung gleich 0 oder ein Dipolmoment gleich 0? Was für $\varepsilon = 1$?

b) Bestimmen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$.

c) Berechnen Sie die Gesamtladung, das Dipolmoment und das Quadrupolmoment. Drücken Sie das Ergebnis durch a, σ und ε aus.

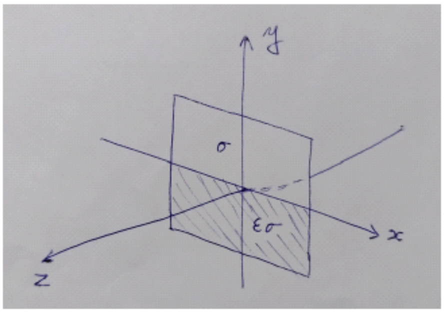


Abbildung 1: Ein spezielles Quadrat und seine Ladungsdichte

a) $\varepsilon = -1 \rightarrow$ Erwartung: Gesamtladung gleich 0, aber Dipolmoment

$\varepsilon = 1 \rightarrow$ kein Dipolmoment aber Gesamtladung

b) $$\rho(\vec{x}) = \sigma\,\delta(z)\cdot\theta\left(\tfrac{a}{2}-x\right)\cdot\theta\left(x+\tfrac{a}{2}\right)\left(\theta\left(\tfrac{a}{2}-y\right)\cdot\theta(y)+\varepsilon\,\theta\left(y+\tfrac{a}{2}\right)\theta(-y)\right)$$

c) $$q = \int_V \rho(\vec{x})\,dV = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\delta(z)\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{0} dy\cdot\varepsilon + \int_{0}^{\frac{a}{2}} dy\right)$$

$$= \sigma\cdot a\cdot\left(\tfrac{a}{2}\varepsilon+\tfrac{a}{2}\right) = \sigma a^2\tfrac{1}{2}(\varepsilon+1)$$

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{x})\,\vec{x}\,dV = \sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{0}\varepsilon\,\delta(z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}dy + \int_{0}^{\frac{a}{2}}\delta(z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}dy\right)dx\,dy$$

$$= \sigma\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\varepsilon\begin{pmatrix}x\cdot\frac{a}{2}\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\\ z\cdot\frac{a}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\cdot\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\\ z\cdot\frac{a}{2}\end{pmatrix}\right)\delta(z)\,dx\,dz = \sigma\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\varepsilon\begin{pmatrix}x\frac{a}{2}\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\\ 0\end{pmatrix}\right)dx$$

$$= \sigma\begin{pmatrix}0\\ -\varepsilon\,\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3\\ 0\end{pmatrix} = \sigma\left(\tfrac{a}{2}\right)^3\begin{pmatrix}0\\1-\varepsilon\\0\end{pmatrix} = \sigma\left(\tfrac{a}{2}\right)^3(1-\varepsilon)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\vec{x})\left(3x_i x_j - \vec{x}^2\delta_{ij}\right)dV$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{0} \varepsilon (3x_i x_j - \vec{x}^2 \delta_{ij})\, dy + \int_{0}^{\frac{a}{2}} (3x_i x_j - \vec{x}^2 \delta_{ij})\, dy \right) \delta(z)\, dx\, dz$$

$$Q = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{0} \varepsilon \cdot 3 \begin{pmatrix} \frac{2x^2}{3} - \frac{y^2-z^2}{3} & xy & xz \\ xy & \frac{2y^2}{3} - \frac{x^2-z^2}{3} & yz \\ xz & yz & \frac{2z^2}{3} - \frac{x^2-y^2}{3} \end{pmatrix} dy + \int_{0}^{\frac{a}{2}} 3 \begin{pmatrix} \frac{2x^2}{3} - \frac{y^2-z^2}{3} & xy & xz \\ xy & \frac{2y^2}{3} - \frac{x^2-z^2}{3} & yz \\ xz & yz & \frac{2z^2}{3} - \frac{x^2-y^2}{3} \end{pmatrix} dy \right) \delta(z)\, dx\, dz$$

$$= \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\varepsilon \cdot 3 \begin{pmatrix} \frac{2x^2}{3} - \frac{(\frac{a}{2})^2}{9} & -x\frac{(\frac{a}{2})}{2} & 0 \\ -\frac{x}{2}(\frac{a}{2}) & \frac{2}{9}(\frac{a}{2})^2 - \frac{x^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x^2}{3} - \frac{(\frac{a}{2})^2}{9} \end{pmatrix} \left(\frac{a}{2}\right) + 3 \begin{pmatrix} \frac{2x^2}{3} - \frac{(\frac{a}{2})^2}{9} & \frac{x}{2}\frac{a}{2} & 0 \\ \frac{x}{2}(\frac{a}{2}) & \frac{2}{9}(\frac{a}{2})^2 - \frac{x^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x^2}{3} - \frac{(\frac{a}{2})^2}{9} \end{pmatrix} \left(\frac{a}{2}\right) \right) dx$$

$$= \sigma \left(3\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{a^3}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^3}{36} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^3}{18} \end{pmatrix} \left(\frac{a}{2}\right) + 3 \begin{pmatrix} \frac{a^3}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^3}{36} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^3}{18} \end{pmatrix} \left(\frac{a}{2}\right) \right)$$

$$= \sigma \frac{a^4}{12} (\varepsilon + 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$