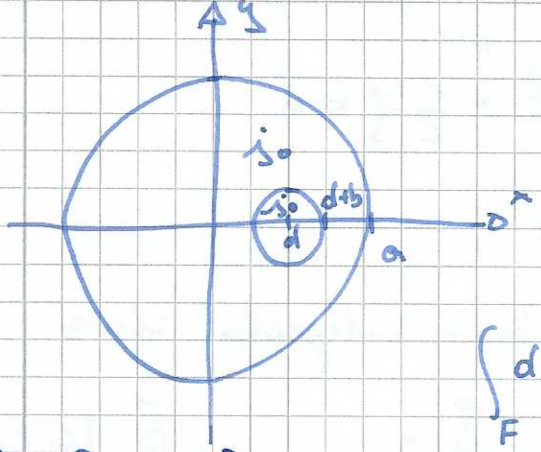



allg. zylindrischer Leiter ohne Hohlraum mit $R = a$ & $\vec{j}_0 = j_0 \vec{e}_z$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0$$

$$\int_F d\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{j}_0 \qquad F \ldots \text{Kreis } R > a$$

$$\vec{j}_0 = j_0 \Theta(r)\,\Theta(a-r)\,\vec{e}_z$$

$$\oint_{\partial F} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} j_0 a^2 \pi$$

$$B_\varphi\, r 2\pi = \frac{4\pi}{c} j_0 a^2 \pi$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{2\pi}{c} \frac{j_0 a^2}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{2\pi j_0 a^2}{c\, r} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{matrix} \sin\varphi = \frac{y}{r} \\ \cos\varphi = \frac{x}{r} \end{matrix} \right| \qquad = \frac{2\pi j_0 a^2}{c\, r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j}_0 \cdot d\vec{F} \qquad F \ldots \text{Kreis } R \leq a$$

$$B_\varphi\, 2r\pi = \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{a^2 \pi} r^2 \pi$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{2\pi I_0}{c\, a^2 \pi} r \vec{e}_\varphi = \frac{2\pi j_0 r}{c} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2\pi j_0}{c} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $\longrightarrow$ Bsp.: $r > a$: $\vec{B} = \frac{2\pi j_0}{c} \left( \frac{a^2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b^2}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

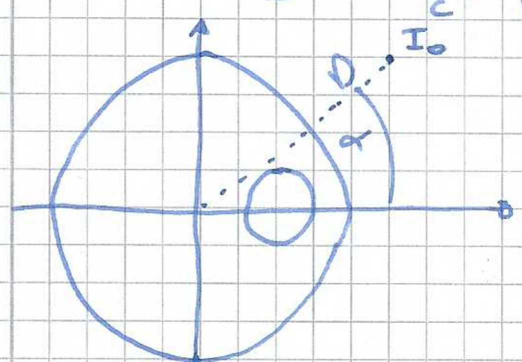
$r < a$: I: (außerhalb des Hohlraums)

$$\vec{B} = \frac{2\pi j_0}{c} \left( \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b^2}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

II: (innerhalb des Hohlraums)

$$\vec{B} = \frac{2\pi j_0}{c} \left( \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{2\pi j_0}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)




$$\vec{j}_{Leiter} = I_0\, \delta(x - D\cos\alpha)\, \delta(y - D\sin\alpha)\, \vec{e}_z$$

Lorentz Kraftdichte : $\vec{f}_L = \underbrace{\rho \vec{E}}_{\to 0} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$

$$\to \quad \vec{F} = \int_V dV \, \vec{f}_L$$

$\to$ Kraft pro Länge $\to$ keine Integration über z

$$\to \frac{\vec{F}}{L} = \frac{1}{c} \iint dx\,dy \; \vec{j} \times \vec{B} = \qquad , \; \vec{B} \text{ für } r > a$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy \; I_0 \frac{2\pi}{c} j_0 \, \delta(x - D\cos\alpha)\, \delta(y - D\sin\alpha) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[ \frac{a^2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b^2}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{2\pi I_0 j_0}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy \; \delta(x - D\cos\alpha)\, \delta(y - D\sin\alpha) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{a^2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b^2}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -x+d \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{2\pi I_0 j_0}{c^2} \left[ \frac{a^2}{D^2} \begin{pmatrix} -D\cos\alpha \\ -D\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b^2}{D^2 - 2Dd\cos\alpha + d^2} \begin{pmatrix} -D\cos\alpha + d \\ -D\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

## 9.2 Kräfte zwischen Kreis- und Linienstrom

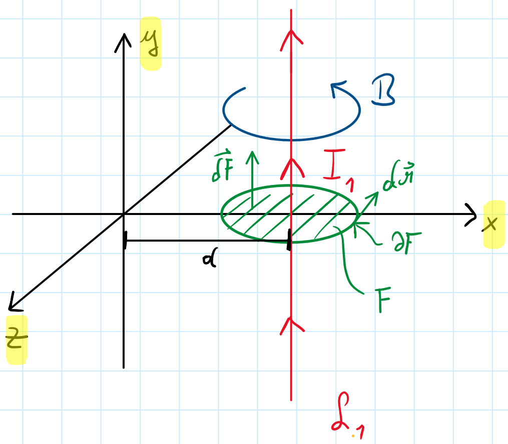
Gegeben sei ein unendlich langer dünner Leiter $L_1$, der im Abstand $x = d$ parallel zur $y$-Achse verläuft und von einem zeitlich konstanten Strom $I_1$ durchflossen wird.

a) Berechne das Magnetfeld und daraus ein Vektorpotential.

b) Betrachte zusätzlich einen dünnen Leiter $L_2$, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der $x$-$y$-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom $I_2$ durchflossen. Berechne die auf den Leiter $L_2$ wirkende Kraft $\vec{F}$.

Hinweis: $\int_0^\pi \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.

a) $$\vec\nabla \times \vec B = \frac{4\pi}{c}\vec j + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec E}_{=0}$$




$$\vec\nabla \times \vec B = \frac{4\pi}{c}\vec j \qquad \Big| \int_F d\vec F$$

$$\int_F (\vec\nabla \times \vec B)\cdot d\vec F = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec j\cdot d\vec F$$

Satz v. Stokes

$\boxed{\text{für } d = 0}$

$$\int_{\partial F} \vec B\cdot d\vec r = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\int_F \vec j\cdot d\vec F}_{I_1} \Longrightarrow \underbrace{|\vec B|}_{=B_\varphi}\underbrace{\int_{\partial F} d\vec r}_{=2r\pi\ \text{(Kreislinie)}} = \frac{4\pi}{c} I_1$$

$$B_\varphi = \frac{2}{c}\frac{I_1}{r} \Longrightarrow \vec B = \frac{2}{c}\frac{I_1}{r}\hat e_\varphi \ \ldots$$ Zylinderkoordinaten, Stab im Ursprung

$\Longrightarrow$ Kartesisch: $z = r\cos\varphi \qquad x = r\sin\varphi$

Achtung: $z \mathrel{\hat=} x$, $x \mathrel{\hat=} y$, $y \mathrel{\hat=} z$

$$r = \sqrt{x^2+z^2}$$

$$\hat e_\varphi = -\sin\varphi\, \hat e_z + \cos\varphi\, \hat e_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\hat e_z + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\hat e_x$$

$$\vec B = \frac{2}{c}\frac{I_1}{x^2+z^2}\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \ \ldots$$ Kartesisch (für $d = 0$)

$\Longrightarrow$ für $d \neq 0$ wird $x$ zu $x - d$

$$\Longrightarrow \vec B = \frac{2}{c}\frac{I_1}{(x-d)^2 + z^2}\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ d-x \end{pmatrix}$$

Vektorpotential: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \overset{!}{=} \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \underbrace{\left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)}_{=0 \;\to\; \text{Coulomb-Eichung}} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} I_1 \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_y (-\hat{e}_y)$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\partial_y A_z} - \partial_z A_y \\ \cancel{\partial_z A_x} - \cancel{\partial_x A_z} \\ \partial_x A_y - \cancel{\partial_y A_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z A_y \\ 0 \\ \partial_x A_y \end{pmatrix} \Rightarrow A_y = \int B_z \, dx$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{2 I_1}{c} \int \frac{d - x}{(x-d)^2 + z^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Subst.:} \\ u = (x-d)^2 + z^2 \\ du = 2(x-d)\,dx \end{array} \right| = \left( -\frac{I_1}{c} \right) \int \frac{1}{u} \, du =$$

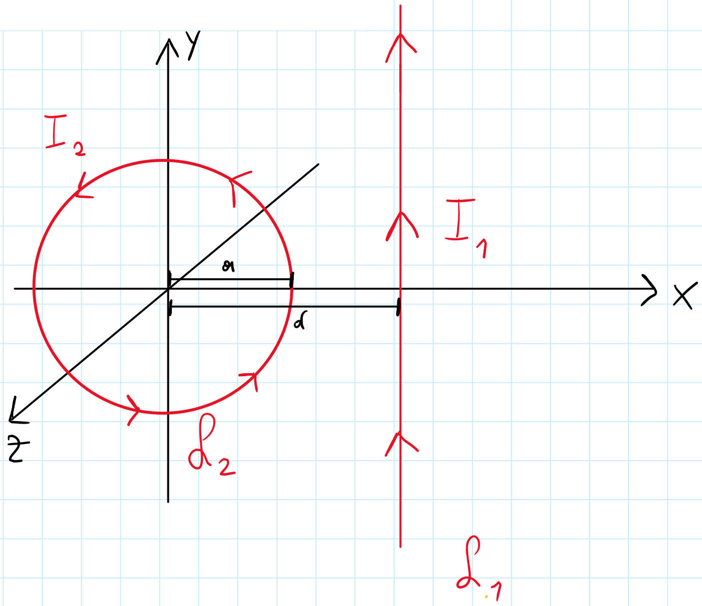
Wähle $= 0$

$$= -\frac{I_1}{c} \ln(u) + c = -\frac{I_1}{c} \ln\left[ (x-d)^2 + z^2 \right] + \cancel{c}$$

$$\vec{A} = -\frac{I_1}{c} \ln\left[ (x-d)^2 + z^2 \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Betrachte zusätzlich einen dünnen Leiter $L_2$, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der $x$-$y$-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom $I_2$ durchflossen. Berechne die auf den Leiter $L_2$ wirkende Kraft $\vec{F}$.

Hinweis: $\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.




Die gesamte Kraft auf eine Leiterschleife $\mathcal{L}$ ergibt sich durch das Superpositionsprinzip als

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{k_4}_{=\frac{1}{c}} \oint_{\mathcal{L}} I \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') \tag{1.52}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{L}_2} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{B}_1(x, y, z) = \frac{2}{c} \frac{I_1}{(x-d)^2 + z^2} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ d-x \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 : \{ x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = 0 \}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 \Big|_{z=0} = \frac{2}{c} \frac{I_1}{(d-x)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{c} \frac{I_1}{(d - a\cos\varphi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{I_2}{c} \frac{2}{c} I_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{(d - a\cos\varphi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2 I_1 I_2}{c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(d - a\cos\varphi)} \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2 I_1 I_2}{c^2} \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{a\cos\varphi}{(d - a\cos\varphi)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{a\sin\varphi}{(d - a\cos\varphi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{2 I_1 I_2}{c^2} \left[ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{a \cos\varphi}{d - a\cos\varphi}}_{\mathrm{I}:} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{a \sin\varphi}{d - a\cos\varphi}}_{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

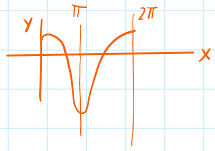
$$\mathrm{I}: \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{a\cos(\varphi)}{d - a\cos\varphi} = a \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{d\left[1 \underbrace{- \frac{a}{d}}_{= \alpha,\ |\alpha| < 1 \ \checkmark} \cos(\varphi)\right]} d\varphi =$$

weil $a < d$

$$= -\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{1 + \alpha\cos(\varphi)} d\varphi = -2\alpha \int_0^{\pi} \frac{\cos(\varphi)}{1+\alpha\cos(\varphi)} d\varphi = \frac{2\cancel{a}}{\cancel{d}} \frac{\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2}} \, \frac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{d}\right)^2} - 1}{-\cancel{\frac{a}{d}}} =$$

symmetrische, $2\pi$ periodische Fkt.

Hinweis: $\int_0^\pi \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.




$$= \frac{-2\pi}{\frac{1}{d}\sqrt{d^2 - a^2}} \left( \frac{1}{d}\sqrt{d^2 - a^2} - 1 \right) = 2\pi \left( \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} - 1 \right)$$

$$\mathrm{II}: \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{a \sin\varphi}{a\cos\varphi - d} = 0$$

weil $\sin(\varphi)$ ungerade, $\cos(\varphi)$ gerade über $[0, 2\pi]$ integriert

$$\Longrightarrow \vec{F} = \frac{4\pi I_1 I_2}{c^2} \left( \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} - 1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3

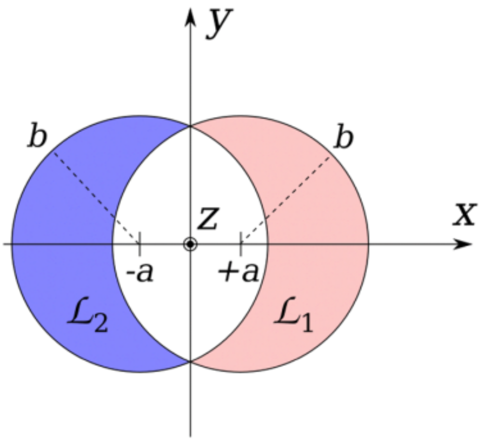
Saturday, 18 May 2024 15:38

### 9.3 Feld zwischen unendlich langen Leitern mit sichelförmigem Querschnitt

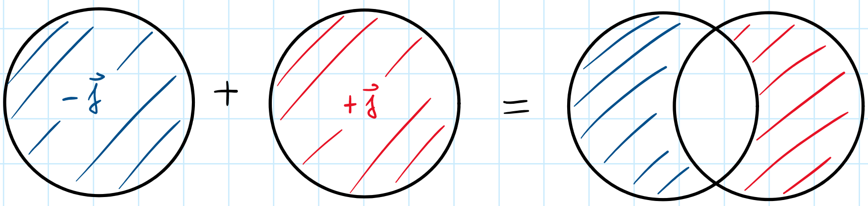
Zwei unendlich lange Leiter $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ besitzen sichelförmige Querschnitte und räumliche Lage wie in der Abbildung dargestellt. Der Leiter $\mathcal{L}_1$ wird in positive $z$-Richtung, der Leiter $\mathcal{L}_2$ in negative $z$-Richtung von einem über den Querschnitt gleichmäßig verteilten elektrischen Strom der Dichte $j_0$ durchflossen.

a) Berechne die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ in dem zwischen den Leitern eingeschlossenen Raumbereich.

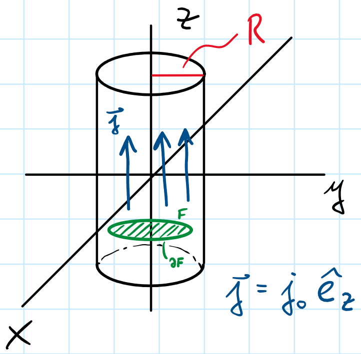
b) Berechne $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ in diesem Raumbereich.




Superpositionsprinzip:




Betrachte einen einzelnen Zylinder entlang z-Achse




$\vec{j} = j_0 \hat{e}_z$

$$\int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F}$$

$\Rightarrow$ Im Inneren: $B_\varphi \cdot \cancel{2}\cancel{r}\cancel{\pi} = \frac{{}^{2}\cancel{4}\pi}{c} j_0 r^{\cancel{2}} \cancel{\pi}$

$B = \frac{2\pi}{\;} j\, r$

$\Rightarrow$ Im Inneren: $B_\varphi \cdot \cancel{2}\cancel{r}\cancel{\pi} = \frac{4\pi}{c} j_0 r^2 \cancel{\pi}$

$$B_\varphi = \frac{2\pi}{c} j_0 r$$

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \frac{2\pi}{c} j_0 r \, \hat{e}_\varphi \quad \text{... Zylinderkoordinaten}$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \hat{e}_x + \cos\varphi \, \hat{e}_y$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \hat{e}_\varphi = -\frac{y}{r}\hat{e}_x + \frac{x}{r}\hat{e}_y$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{2\pi}{c} j_0 \cancel{r} \left(-\frac{y}{\cancel{r}}\hat{e}_x + \frac{x}{\cancel{r}}\hat{e}_y\right) = \frac{2\pi}{c} j_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Superposition zweier verschobener Zylinder:

links: $x \rightarrow x + a$ rechts: $x \rightarrow x - a$

$$\vec{B}_{ges}(x, y, z) = \frac{2\pi}{c} j_0 \left[ - \begin{pmatrix} -y \\ x+a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{4\pi}{c} j_0 a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entgegengesetzter Strom!

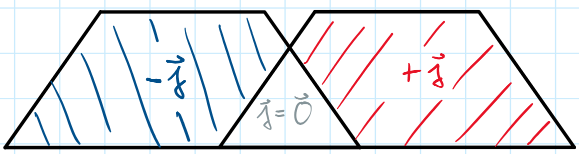
b) Berechne $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ in diesem Raumbereich. Wie würde das Ergebnis in dieser Teilaufgabe ausfallen, wenn wir die beiden kreisförmigen Querschnitte durch überlappende trapezförmige Querschnitte ersetzen?

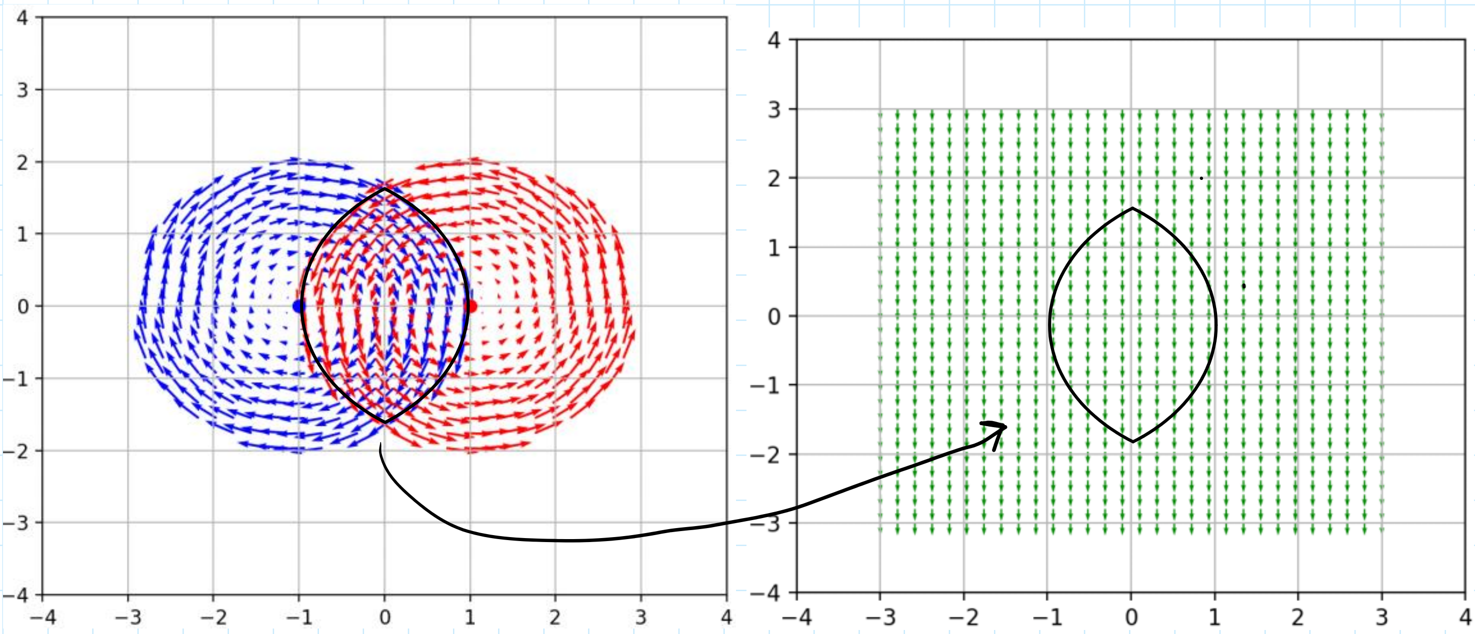
In beiden Fällen gilt $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ gilt immer

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\cancel{\vec{j}}}_{=0} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}}}_{\text{kein } \vec{E}\text{-Feld}}$$

im überlappenden Bereich





4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4