1) $\vec{A} = \frac{A_0}{r} e^{i(kr-\omega t)} \hat{e}_z \quad , A_0 \in \mathbb{R}$

$\hat{e}_z = \cos\theta\, \hat{e}_r - \sin\theta\, \hat{e}_\theta$ Kugelkoordinaten ~~ständig~~

$\Rightarrow \vec{A} = \frac{A_0}{r} e^{i(kr-\omega t)} \left[\cos\theta\, \hat{e}_r - \sin\theta\, \hat{e}_\theta\right]$

a) $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = +\frac{1}{r}\left[\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r\right] \hat{e}_\varphi$

$$= +\frac{1}{r}\left[\partial_r\left(-A_0 e^{i(kr-\omega t)} \sin\theta\right) - \partial_\theta \frac{A_0}{r} e^{i(kr-\omega t)} \cos\theta\right] \hat{e}_\varphi$$

$$= \ldots = -\frac{A_0}{r} \sin\theta \left(\underline{ik} - \frac{1}{r}\right) e^{i(kr-\omega t)} \hat{e}_\varphi$$

b) $r \to \infty$: nur führender Term

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{A_0}{r} \sin\theta \cdot ik\, e^{i(kr-\omega t)} \hat{e}_\varphi$$

Lorenz-Eichung: $\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = \emptyset$

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \partial_z A_z = A_0 \cdot \frac{z}{r^2}\left(ik - \frac{1}{r}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$
$$= \frac{A_0}{r} \cos\theta \left(ik - \frac{1}{r}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = -c \int dt\, \vec{\nabla}\vec{A} = -c \frac{A_0}{r} \cos\theta \left(ik - \frac{1}{r}\right) e^{ikr} \int dt\, e^{-i\omega t}$$

$$= \underbrace{\frac{c}{i\omega}}_{} \frac{A_0}{r} \cos\theta \left(ik - \frac{1}{r}\right) e^{i(kr-\omega t)} = \frac{A_0}{r} \cos\theta \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{c}{\omega} = \frac{1}{k}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$

$\downarrow$

$$-\vec{\nabla}\phi = -\partial_r \phi \cdot \hat{e}_r - \frac{1}{r}\partial_\theta \phi \cdot \hat{e}_\theta$$

$$\partial_r \phi = \partial_r \frac{A_0}{r} \cos\theta \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= A_0 \cos\theta \, e^{i(kr-\omega t)} \left[-\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{-1}{ik}\,\frac{-1}{r^2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) ik \right]$$

$$= \ldots = \frac{A_0}{r}\cos\theta \left[ik + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{ikr} - 1\right)\right] e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\partial_\theta \phi = \partial_\theta \frac{A_0}{r}\cos\theta \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{i(kr-\omega t)} = -\frac{A_0}{r}\sin\theta \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}\phi = -\frac{A_0}{r}\cos\theta \left[\cancel{ik} + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{ikr} - 1\right)\right] e^{i(kr-\omega t)} \, \hat{e}_r$$

$$+ \frac{A_0}{r^2}\sin\theta \left[1 - \frac{1}{ikr}\right] e^{i(kr-\omega t)} \, \hat{e}_\theta$$

$$-\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} = -\frac{1}{c}\,\frac{A_0}{r}(-i\omega)\, e^{i(kr-\omega t)} \left(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{A_0}{r}\left(\cancel{\cos\theta\,\hat{e}_r} - \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right)[ik]\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} = \frac{A_0}{r} e^{i(kr-\omega t)} \Big[\cos\theta \cdot \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)\hat{e}_r +$$

$$+ \sin\theta\left(-ik + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)\right)\hat{e}_\theta \Big]$$

b) $r \to \infty$: $\quad \vec{E} = -\frac{A_0}{r}\sin\theta \; ik \; e^{i(kr-\omega t)} \, \hat{e}_\theta$

c) $\quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}\vec{E} \times \operatorname{Re}\vec{B} = +\frac{c}{4\pi}\operatorname{Re}E_\theta \cdot \operatorname{Re}B_\varphi \cdot \hat{e}_r$

$$\operatorname{Re}E_\theta = \frac{A_0}{r}\sin\theta \, k \cdot \sin(kr-\omega t)$$
$$\operatorname{Re}B_\varphi = \frac{A_0}{r}\sin\theta \, k \, \sin(kr-\omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\frac{A_0^2}{r^2}\sin^2\theta \, k^2 \sin^2(kr-\omega t)$$

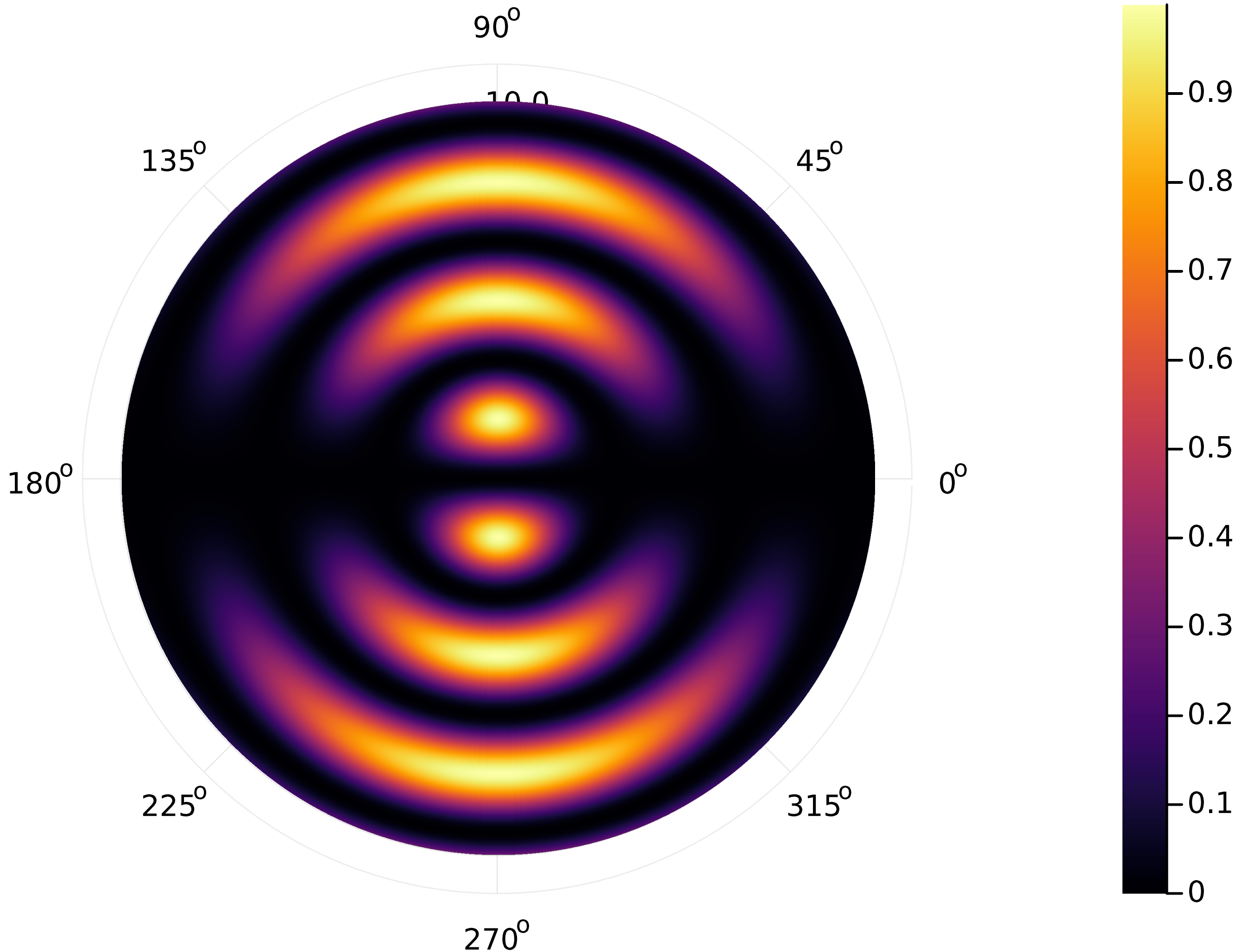
$$\vec{S}\,d\vec{A} = \vec{S}\cdot\hat{e}_r \, r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} A_0^2 k^2 \sin^2\theta \sin^2(kr-\omega t)$$ → siehe plot "abstrahlung.pdf"

$$\Rightarrow \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} A_0^2 k^2 \sin^2\theta \underbrace{\langle \sin^2(kr-\omega t)\rangle}_{\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{c}{8\pi} A_0^2 k^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \langle P\rangle = \int \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{c}{8\pi} A_0^2 k^2 \sin^2\theta$$

$$= \frac{c}{4} A_0^2 k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = \frac{c}{3} A_0^2 k^2$$


90°
45°
0°
315°
270°
225°
180°
135°
10.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

11.2 Elliptisch polarisierte Welle

Wir betrachten eine elliptisch polarisierte elektromagnetische Welle im Vakuum mit E-Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = a\,\sin(kx-\omega t)\,\vec{e}_y + b\,\cos(kx-\omega t)\,\vec{e}_z\ , \quad a,\,b \in \mathbb{R}^*\ . \qquad (2)$$

Bestimmen Sie

a) das B-Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$;

b) die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes;

c) den Poynting Vektor;

d) den zeitlichen Mittelwert des Poynting Vektors.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

a) $$\vec{E} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ a\sin(kx-\omega t) \\ b\cos(kx-\omega t) \end{pmatrix} \longrightarrow -c\,\vec{\nabla}\times\vec{E} = -c\begin{pmatrix} 0 \\ k\sin(kx-\omega t)\cdot b \\ k\cos(kx-\omega t)\cdot a \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{B} = \underbrace{\frac{ck}{\omega}}_{=1}\begin{pmatrix} 0 \\ -b\cos(kx-\omega t) \\ a\sin(kx-\omega t) \end{pmatrix}$$

b) $$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(a^2\sin^2(kx-\omega t) + b^2\cos^2(kx-\omega t) + b^2\cos^2(kx-\omega t) + a^2\sin^2(kx-\omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(a^2\sin^2(kx-\omega t) + b^2\cos^2(kx-\omega t)\right)$$

c) $$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{c}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ a\sin(kx-\omega t) \\ b\cos(kx-\omega t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -b\cos(kx-\omega t) \\ a\sin(kx-\omega t) \end{pmatrix}$$

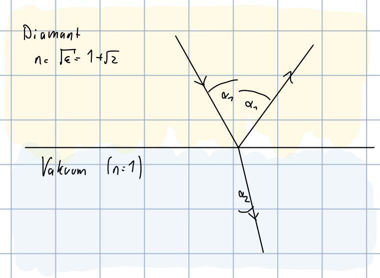
$$= \frac{c}{4\pi}\begin{pmatrix} a^2\sin^2(kx-\omega t) + b^2\cos^2(kx-\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\begin{pmatrix} a^2\langle\sin^2(kx-\omega t)\rangle + b^2\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right) \quad \frac{c}{4\pi}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

$$= \frac{c}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{8\pi}\begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.2) Totalreflexion am Diamanten

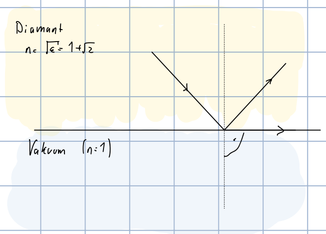


Snellius: $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$

hier: $n_2 \overset{\text{Vakuum}}{=} 1$, $n := n_1$

$\Rightarrow n \cdot \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$

Ab einem Grenzwinkel α_{Gr} kommt es zur Totalreflexion.
Lichtstrahl wird vollständig reflektiert.



In diesem Fall: $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$\sin \alpha_{Gr} = \frac{1}{n}$

<u>Fresnelgleichungen</u> für den Fall eines idealen Dielektrikums ($k = 0$)

$N = n + ik \quad \Rightarrow \quad N = n$

•) Transversal magnetische Komponente (TM) / Parallele Polarisation

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{\cos\alpha_1 - n\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1 + n\cos\alpha_2}$$

Zur Berechnung betrachte Snellius: $\sin\alpha_2 = n\sin\alpha_1$

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha_2} = n\sin\alpha_1$$

$$\cos\alpha_2 = \sqrt{\underbrace{1-n^2\sin^2\alpha_1}_{=:D}}$$

sin(x) ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend

Für den Grenzwinkel gilt: $\sin\alpha_{Gr} = \frac{1}{n}$

D.h. im Bereich der Totalreflexion $\left(\frac{\pi}{2} > \alpha > \alpha_{Gr}\right)$ gilt: $\sin\alpha > \frac{1}{n}$

Deshalb ist der Ausdruck D unter der Wurzel negativ:

$$D = 1 - n^2\sin^2\alpha_1 < 1 - n^2\frac{1}{n^2} = 0$$

Der Ausdruck für $\cos\alpha_2$ wird also imaginär:

$$\cos\alpha_2 = \sqrt{(-1)\cdot(n^2\sin^2\alpha_1 - 1)} = i\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}$$

Dieser Ausdruck kann nun in die Fresnelgleichung eingesetzt werden:

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{\cos\alpha_1 - ni\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1 + ni\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}} =: \frac{z}{\bar{z}} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Man erkennt: $\frac{E_p''}{E_p}$ ist das Verhältnis zweier zueinander komplex konjugierten Zahlen z & $\bar{z}$. Weil gilt $|z| = |\bar{z}|$ bleibt die Norm für den reflektierten Strahl erhalten & es kommt eine Phasenverschiebung dazu. Benutze die Polardarstellung für komplexe Zahlen: $z = |z|e^{i\varphi}$

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{|z|\,e^{i\arctan\left(\frac{-n\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1}\right)}}{|\bar{z}|\,e^{i\arctan\left(\frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1}\right)}} = e^{-2i\arctan\left(\frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1}\right)} =: e^{-i\varphi_p}$$

Erinnerung: sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$

Polarform: $z = r\cdot e^{i\varphi}$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\text{mit } \tan\frac{\varphi_p}{2} = \frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1}$$

-) Transversalelektrische Komponente (TE) / Senkrechte Polarisation

Die Fresnelgleichung für reflektierte Wellen, die linear senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind:

$$\frac{E_s''}{E_s} = \frac{n\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{n\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}$$

Gleichen Ausdruck für $\cos\alpha_2$ und analoges Vorgehen wie oben:

$$\frac{E_s''}{E_s} = \frac{n\cos\alpha_1 - i\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\cos\alpha_1 + i\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}} = e^{-i\varphi_s} \quad \text{mit} \quad \tan\frac{\varphi_s}{2} = \frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\cdot\cos\alpha_1}$$

Gesamte Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_p - \varphi_s$:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\varphi_p - \varphi_s}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\varphi_p}{2}\right) - \tan\left(\frac{\varphi_s}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\varphi_s}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\varphi_p}{2}\right)}$$

Additionstheorem:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\cdot\tan(y)}$$

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{\cos\alpha_1} - \frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\cdot\cos\alpha_1}}{1 + \frac{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}{\cos^2\alpha_1}} = \frac{\frac{(n^2-1)\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\cos\alpha_1}}{\frac{\cos^2\alpha_1 + n^2\sin^2\alpha_1 - 1}{\cos^2\alpha_1}}$$

$$= \frac{\cos\alpha_1(n^2-1)\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n(\underbrace{\cos^2\alpha_1 + n^2\sin^2\alpha_1 - 1}_{-\sin^2\alpha_1 + n^2\sin^2\alpha_1 = (n^2-1)\sin^2\alpha_1})} = \frac{\cos\alpha_1\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\sin^2\alpha_1}$$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

Um aus linear polarisierten Licht zirkular polarisiertes Licht zu bekommen, muss die Phasenverschiebung der beiden linear pol. Komponenten (TE&TM) $\frac{\pi}{2}$ betragen:

$$\varphi \overset{!}{=} \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1} = \frac{\cos\alpha_1\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\sin^2\alpha_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha_1\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1 - 1}}{n\sin^2\alpha_1} - 1 = 0$$

Falls diese Gleichung für ein festes n eine Lösung für α_1 besitzt, kann man daraus den notwendigen Einfallswinkel α_1 bestimmen.

Falls diese Gleichung keine Lösung besitzt, so ist es für diese Grenz-

schicht nicht möglich, die gewünschte Polarisationsänderung vorzunehmen.
Die Lösbarkeit hängt also von n ab.

$$\frac{\cos\alpha_1\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1-1}}{n\sin^2\alpha_1} - 1 = 0$$

$$\cos\alpha_1\sqrt{n^2\sin^2\alpha_1-1} = n\sin^2\alpha_1$$

$$\cos^2\alpha_1\left(n^2\sin^2\alpha_1-1\right) = n^2\sin^4\alpha_1$$

$$\left(1-\sin^2\alpha_1\right)\left(n^2\sin^2\alpha_1-1\right) = n^2\sin\alpha_1^4 \quad \Big| \quad \sin^2\alpha_1 = u$$

$$u^2 - \frac{n^2+1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = 0$$

$$u = \frac{n^2+1}{4n^2} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2+1}{4n^2}\right)^2 - \frac{1}{2n^2}}$$

Es existiert eine reelle Lösung für α_1, wenn die Diskriminante ≥ 0 ist:

$$\frac{n^4+2n^2+1}{16n^4} - \frac{1}{2n^2} \geq 0$$

$$\frac{1}{16n^4}\left(n^4-6n^2+1\right) \geq 0$$

$$n^4-6n^2+1 \geq 0 \qquad t = n^2$$

$$t^2-6t+1 \geq 0$$

$$t \geq 3+\sqrt{8} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

$$\underline{n \geq 1+\sqrt{2} \approx 2{,}41}$$

i) Diamant: $n = 1+\sqrt{2}$

=> Es gibt genau einen Winkel α_1 für den die Bedingung erfüllt ist.

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{n^2+1}{4n^2}\right)^2 - \frac{1}{2n^2}}}_{=0 \text{ für } n=1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2}} \quad => \alpha_1 = 33{,}77^\circ$$

ii) Kronglas : $n \approx 1{,}5$

Lösbarkeitskriterium nicht erfüllt. $n < 2{,}41$

Schwingungsrichtung :

Für zirkular polarisiertes Licht muss gelten : $|E_p| = |E_s|$
Deswegen muss auch schon die einfallende Welle diese Bedingung erfüllen, weil wie oben gezeigt die Amplitude unverändert bleibt, es kommt nur zu einer Phasenverschiebung.
Deswegen muss die Schwingungsrichtung $\frac{\pi}{4}$ in Bezug auf den Wellenvektor $\vec{k}$ sein.