

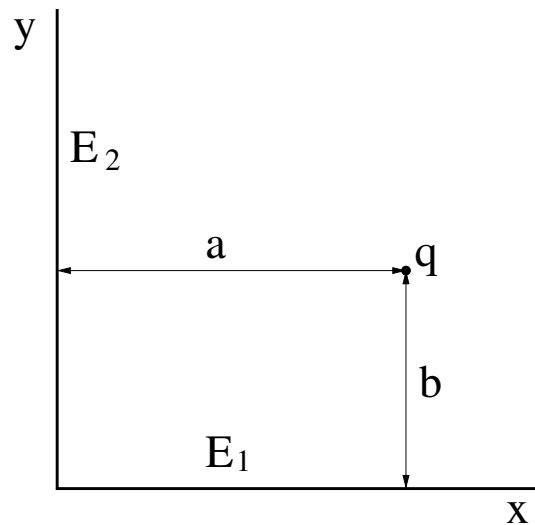
Übungsplenum

18.04.2024

Methoden der Bildladungen: Punktladung mit Leiterhalbebenen

Zwei zueinander senkrechte, geerdete Leiterhalbebenen E_1 , E_2 werden in das Feld einer Punktladung q gebracht, siehe Abbildung.

1. Gib die Differentialgleichung für das Potential ϕ im Gebiet $V \equiv \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, -\infty < z < \infty\}$ und die zugehörigen Randbedingungen an.
2. Berechne das Potential mit Hilfe geeigneter fiktiver Punktladungen ("Bildladungen").
3. Berechne die auf E_1 , E_2 induzierte Flächenladungsdichten σ_1 , σ_2 , und die zugehörigen Gesamtladungen q_1 , q_2 . Wie groß ist die gesamte induzierte Ladung $q_1 + q_2$?
4. Berechne die Kraft, die auf die Punktladung wirkt.
5. Nun sei ein Potential $\phi|_{E_1} = +\phi_0$, $\phi|_{E_2} = -\phi_0$ auf E_1 , E_2 vorgegeben und es gebe keine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in V . Was ist $\phi(\vec{r})$?



Lösung:

1. Die Differentialgleichung für ϕ ist die Poissongleichung

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \tag{1}$$

$$= -4\pi q\delta(x - a)\delta(y - b)\delta(z), \tag{2}$$

wobei hier die Position der Ladung q als $\vec{r}_1 = (a, b, 0)$ bezeichnet wurde. Da die Leiterplatten "geerdet" sind, verschwindet das Potential auf ihnen, also $\phi|_{E_1} = \phi|_{E_2} = 0$ bzw. explizit

$$E_1 : \quad \phi(x, 0, z) = 0 \quad \text{für } x > 0 \tag{3a}$$

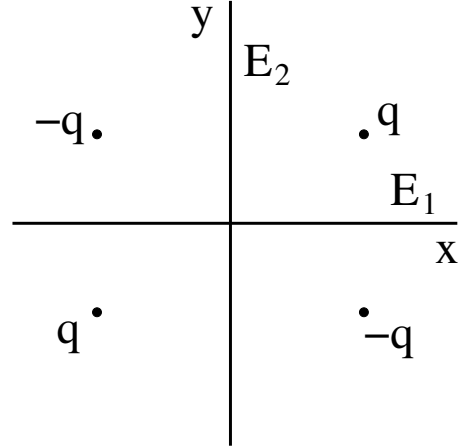
$$E_2 : \quad \phi(0, y, z) = 0 \quad \text{für } y > 0. \tag{3b}$$

Grundsätzlich wird diese Art von Randbedingungen als "Dirichlet-Randbedingungen" bezeichnet. Dabei gilt $\phi|_{\partial V} = 0$, wobei in unserem Fall der Rand von V (kurzum ∂V) den Ebenen entspricht.

Ausserdem muss das Potential im Unendlichen verschwinden, $\phi(x, y, z) \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$.

2.

Wir führen nun drei “Bildladungen” wie in der Abbildung gezeigt ein. Die Idee ist, dass sie die Leiterebenen “ersetzen”, d.h. dass die obigen Randbedingungen durch die Bildladungen “erzeugt” werden. Mit anderen Worten, das durch die Punktladung erzeugte Potential (und elektrische Feld) ist dasselbe in beiden Fällen, im Fall der Leiterebenen und im Fall der Bildladungen ohne Leiterebenen. Die Position und Lage der Bildladungen “errät” man zunächst und bestätigt dann, dass die Randbedingungen tatsächlich erfüllt sind. Dies tun wir als nächstes.



Wir bezeichnen die ursprüngliche Punktladung mit $Q_1 = q$ und die anderen gegen den Uhrzeigersinn mit $Q_2 = -q$, $Q_3 = q$, $Q_4 = -q$. Entsprechend ordnen wir ihnen die Ortsvektoren zu,

$$\vec{r}_1 = (a, b, 0), \quad \vec{r}_2 = (-a, b, 0), \quad \vec{r}_3 = (-a, -b, 0), \quad \vec{r}_4 = (a, -b, 0), \quad (4)$$

oder anhand von Spiegelungen

$$\vec{r}_1 = (a, b, 0), \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1|_{a \rightarrow -a}, \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_1|_{a \rightarrow -a, b \rightarrow -b}, \quad \vec{r}_4 = \vec{r}_1|_{b \rightarrow -b}. \quad (5)$$

Damit ist die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^4 Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (6)$$

und das Potential wird

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (7)$$

mit

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2}, \quad |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2 + z^2}, \quad (8a)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_3| = \sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2 + z^2}, \quad |\vec{r} - \vec{r}_4| = \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2 + z^2}. \quad (8b)$$

Hierbei ist zu beachten, dass der erste – physikalische – Term die Poissongleichung (1) erfüllt, während die anderen drei – “fiktiven” – Terme die *homogene* Poissongleichung $\Delta\phi_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0$ (im Gebiet V) erfüllen, also allgemein:

$$\phi(\vec{r}) = \int_G d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_{\text{hom}}(\vec{r}), \quad (9)$$

mit der Lösung der homogenen Poissongleichung $\phi_{\text{hom}}(\vec{r})$. Damit erfüllt offenbar das Potential $\phi(\vec{r})$ die inhomogene Poisson-Gleichung (1).

Nun können wir die Randbedingungen überprüfen,

$$\begin{aligned}\phi(x, 0, z) &= \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2 + z^2}} \\ &+ \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2 + z^2}} = 0,\end{aligned}\quad (10)$$

und

$$\begin{aligned}\phi(0, y, z) &= \frac{q}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} \\ &+ \frac{q}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} = 0,\end{aligned}\quad (11)$$

Offensichtlich verschwindet das Potential auch im Unendlichen, $\phi(|\vec{r}| \rightarrow \infty) = 0$.

Damit haben wir gezeigt, dass das Potential in Anwesenheit der Leiterebenen durch Glg. (7) gegeben ist.

3. Die Flächenladungsdichte σ ist gegeben durch die Normalkomponente des elektrischen Feldes,

$$E_n(\vec{r}) = 4\pi\sigma. \quad (12)$$

Für unseren Fall bedeutet das

$$\sigma_1(x, z) = \frac{E_y(x, 0, z)}{4\pi}, \quad \sigma_2(y, z) = \frac{E_x(0, y, z)}{4\pi}. \quad (13)$$

Das elektrische Feld ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^4 Q_i \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (14)$$

Wir benötigen also (siehe Plenum 4)

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, \quad (15)$$

und analog für die anderen Terme $i = 2, 3, 4$. Damit ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^4 Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (16)$$

Die Flächenladungsverteilung auf E_1 ist also (die y -Komponente von $(\vec{r} - \vec{r}_1)_y|_{y=0} = -b$, etc.)

$$\begin{aligned}\sigma_1(x, z) &= \frac{q}{4\pi} \left\{ -\frac{b}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{b}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{b}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \\ &= -\frac{qb}{2\pi} \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right\}.\end{aligned}\quad (17)$$

Analog ergibt sich für E_2 ,

$$\sigma_2(y, z) = -\frac{qa}{2\pi} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right\}. \quad (18)$$

Man sieht also, dass eine inhomogene Ladungsverteilung induziert worden ist. Man kann sich nun z.B. überlegen, wo das Maximum der Ladungsverteilungen liegt, sagen wir für $z = 0$. Falls etwa $a \gg b$, so dass der Effekt von E_2 vernachlässigbar wird, liegt das Maximum von σ_1 bei $x = a$, wie erwartet. Der Effekt der zweiten Leiterebene macht das Ergebnis aber im Allgemeinen komplizierter, d.h. das Maximum liegt im Allgemeinen nicht bei $x = a$.

Ausserdem sollte man sich noch einmal klar machen, warum sich eine (inhomogen verteilte) Ladung auf den Ebenen bildet. Wo kommt diese zusätzliche Ladung her? Durch das fest gewählte Potential $\phi = 0$ (die "Erdung") haben wir diese "Ladungserzeugung" zugelassen, ganz analog zur Thermodynamik, wenn man ein chemisches Potential festhält und somit ein Teilchenbad einführt, das dem betrachteten System Teilchen hinzufügen oder wegnehmen kann. Man hätte auch die Ladung auf den Platten festlegen können, dann hätte sich das Potential automatisch eingestellt.

Wir berechnen nun die induzierten Ladungen durch Integration über die Flächenladungen,¹

$$\begin{aligned} q_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dx \sigma_1(x, z) \\ &= -\frac{qb}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \underbrace{\int_0^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right\}}_{\int_{-a}^{\infty} d\xi \frac{1}{(\xi^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} - \int_a^{\infty} d\xi \frac{1}{(\xi^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{-a}^a d\xi \frac{1}{(\xi^2 + b^2 + z^2)^{3/2}}} \\ &= -\frac{2qb}{\pi} \int_0^a d\xi \underbrace{\int_0^{\infty} dz \frac{1}{(\xi^2 + b^2 + z^2)^{3/2}}}_{\frac{z}{(\xi^2 + b^2)\sqrt{\xi^2 + b^2 + z^2}} \Big|_{z=0}^{z=\infty}} \\ &= -\frac{2qb}{\pi} \underbrace{\int_0^a d\xi \frac{1}{\xi^2 + b^2}}_{\frac{1}{b} \arctan \frac{\xi}{b} \Big|_{\xi=0}^{\xi=a}} \\ &= -\frac{2q}{\pi} \arctan \frac{a}{b}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wir sehen, dass die Ladung entgegengesetztes Vorzeichen zu q hat. Das ist klar, da die Ladungen im Leiter die äußere Ladung abschirmen, damit auf dem Leiter das Potential verschwindet.

¹Im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile wurde einerseits die x -Variable substituiert und andererseits ausgenutzt, dass ξ^2 und z^2 gerade Funktionen sind (also symmetrisch in Bezug auf Spiegelungen). Das Integral über z kann durch Differentiation des Ergebnisses bestätigt werden.

Wir können auch wieder den Grenzfall $a \gg b$ bilden, bei dem der Effekt der zweiten Leiterebene verschwinden muss. Wie erwartet findet man dann $q = -q_1$. Der Effekt der zweiten Leiterebene ist, den Betrag der induzierten Ladung auf der ersten Leiterebene zu verringern.

Analog findet man

$$q_2 = -\frac{2q}{\pi} \arctan \frac{b}{a}, \quad (20)$$

und damit

$$q_1 + q_2 = -q, \quad (21)$$

wobei wir $\arctan x + \arctan x^{-1} = \pi/2$ ausgenutzt haben². D.h. die beiden Leiterebenen zusammen tragen die gleiche Gesamtladung wie die Punktladung, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Diese Gesamtladung ist auch die Summe der drei Bildladungen, $Q_2 + Q_3 + Q_4 = -q$. Für $a = b$ verteilt sich diese Ladung gleichmäßig auf die beiden Halbebenen, $q_1 = q_2 = -\frac{q}{2}$, denn $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

4. Die Kraft auf $Q_1 = q$ ist gegeben durch das von den drei Bildladungen erzeugte elektrische Feld,

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}_1), \quad (22)$$

wobei wir von Glg. (16) ablesen

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = -q \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + q \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} - q \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|^3}. \quad (23)$$

Mit

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (2a, 0, 0), \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = (2a, 2b, 0), \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_4 = (0, 2b, 0) \quad (24)$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q^2 \left[-\frac{(2a, 0, 0)}{8a^3} + \frac{(2a, 2b, 0)}{8(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{(0, 2b, 0)}{8b^3} \right] \\ &= -\frac{q^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}}, \frac{1}{b^2} - \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}, 0 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Man kann dieses Ergebnis interpretieren, indem man zunächst den Grenzfall $a = b$ betrachtet. In diesem Fall zeigt die Kraft in Richtung des Koordinatenursprungs, was aus Symmetriegründen klar ist,

$$a = b : \quad \vec{F} = -\frac{q^2}{4} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}, 0 \right). \quad (26)$$

²Das sieht man z.B. mit der allgemeinen Beziehung (für $xy < 1$)

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$$

und anschließendem Grenzfall $y \rightarrow 1/x$

Diese Richtung der Kraft gilt aber *nur* für $a = b$. Für $a \gg b$ ergibt sich unter Berücksichtigung des jeweils führenden Terms in den beiden nichtverschwindenden Komponenten,

$$a \gg b : \quad \vec{F} = -\frac{q^2}{4} \left(\frac{3b^2}{2a^4}, \frac{1}{b^2}, 0 \right). \quad (27)$$

Die Punktladung spürt also in y -Richtung eine Kraft, die äquivalent zu der einer Punktladung $-q$ am Punkt $(a, 0, 0)$ ist. Dazu mache man sich klar dass für nur eine Leiterebene (oder für $a \gg b$) die Flächenladungsverteilung auf E_1 sich einer Punktladung annähert, für $b \rightarrow 0$.

5. Da wir nun das Problem einer Punktladung q vor einer Leiterkonfiguration mit verschwindendem Potential $\phi|_{\partial V} = 0$ gelöst haben, können wir wie in der Vorlesung gelernt sofort die Dirichlet-Green-Funktion aufschreiben

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{1}{q} \phi_q(\vec{r}; \vec{r}_1), \quad (28)$$

wobei wir das Potential aus den vorherigen Unteraufgaben nun zur Unterscheidung als ϕ_q bezeichnen und die implizite Abhängigkeit vom Ort des Punktteilchens \vec{r}_1 explizit geschrieben haben. Damit können wir Probleme mit beliebig vorgegebenen Potentialen auf ∂V lösen,

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\vec{f}' \cdot \phi(\vec{r}') \partial_{n'} G_D(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (29)$$

Laut Aufgabenstellung gilt $\rho = 0$ und $\phi|_{E_{1/2}} = \pm\phi_0$. Außerdem erkennen wir in $\partial_{n'} G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ auf E_1 und E_2 jeweils die Flächenladungsdichten:

$$\partial_{n'} G_D(\vec{r}, \vec{r}')|_{E_{1/2}} = \partial_{n'} G_D(\vec{r}', \vec{r})|_{E_{1/2}} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{q} \partial_{n'} \phi_q(\vec{r}'; \vec{r})|_{E_{1/2}} \quad (31)$$

$$= \frac{1}{q} E_{n'}(\vec{r}'; \vec{r})|_{E_{1/2}} \quad (32)$$

$$= \frac{4\pi}{q} \sigma_{1/2}(\vec{r}'; \vec{r}). \quad (33)$$

In der dritten Zeile haben wir $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ sowie benutzt, dass der Normalenvektoren zur Berechnung der Oberflächenladung von der Leiteroberfläche wegzeigt, während \vec{n} in Glg. (29) aus dem Volumen und zum Leiter hin zeigt, es also ein relatives Minuszeichen gibt (bitte darauf in der Praxis achten). Damit erhalten wir für Glg. (29)

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{q} \int_{E_1} df' \sigma_1(\vec{r}'; \vec{r}) \phi_0 - \frac{1}{q} \int_{E_2} df' \sigma_2(\vec{r}'; \vec{r}) (-\phi_0) \quad (34)$$

$$= \frac{\phi_0}{q} (-q_1(\vec{r}) + q_2(\vec{r})) \quad (35)$$

$$= \frac{2\phi_0}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{y}{x} \right), \quad (36)$$

wobei wir das Ergebnis aus Unteraufgabe 3 benutzt haben. Nach Konstruktion sind die Randbedingungen erfüllt. Man kann das auch explizit prüfen, also $\phi|_{E_{1/2}} = \pm\phi_0$, wie gefordert.