1 Klassisches ultrarelativistisches ideales Gas (?? Punkte)

Die Hamiltonfunktion eines idealen relativistischen Punktteilchens mit Ruhemasse m ist

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \qquad \text{mit } p = |\boldsymbol{p}|.$$

(a) Geben Sie die Hamiltonfunktion des idealen Gases bestehend aus N relativistischen Teilchen an und schreiben Sie den Ansatz für die kanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{K}(\beta, V, N)$ ununterscheidbarer Teilchen bei Temperatur T und $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ im Volumen V an. (6P)

(b) Verwenden Sie die ultrarelativistische Näherung $pc \gg mc^2$ um die Integrale der kanonischen Zustandssumme auszuwerten und zeigen Sie

$$Z_\mathrm{K}(\beta, V, N) = \frac{1}{N!}\left(\frac{8\pi V}{\beta^3 c^3 h^3}\right)^N .$$

(c) Finden Sie für die ultrarelativistische Näherung die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(p)$ für den Betrag des Impulses eines Teilchens aus der 1-Teilchen-Impulsverteilung. Skizzieren Sie $f(p)$ und zeigen Sie damit, dass der Impuls mit der höchsten Wahrscheinlichkeitsdichte $2/(\beta c)$ ist.

2 Dichtematrix (?? Punkte)

Sei $\hat{\rho}$ eine Dichtematrix eines Gleichgewichtszustandes für ein System mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ von N Teilchen.

(a) Welche Relation gilt in diesem Fall zwischen $\hat{\rho}$ und $\hat{H}$?

(b) Geben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Gleichgewichtszustands in ihrer Spektraldarstellung an. Welche Zustände diagonalisieren die Dichtematrix und welche Parameter sind noch unbestimmt?

(c) Bestimmen Sie nun die Entropie S aus $\hat{\rho}$ mit Hilfe der Spektraldarstellung.

(d) Das kanonische Ensemble ergibt sich für $\hat{\rho}$ aus der Maximierung von S unter zwei Nebenbedingungen. Wie lauten diese Nebenbedingungen (Formel gefragt)? Maximieren Sie nun S unter diesen Nebenbedingungen. Welche funktionale Form ergibt sich daraus für die Eigenwerte von $\hat{\rho}$ als Funktion der Energieeigenwerte E_i? (Die zwei Lagrangemultiplikatoren müssen nicht bestimmt werden.)

3 Ideale Quantensysteme (?? Punkte)

Die großkanonische Zustandssumme eines idealen Quantensystems ist gegeben durch

$$Z_{\mathrm{G}} = \prod_k \sum_{n_k} \left(e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} \right)^{n_k} . \tag{1}$$

Lösen und beantworten Sie die folgenden Punkte für **Fermionen**.

(a) Wofür steht k, ε_k und n_k? Welche Werte nehmen die n_k an?

(b) Berechnen Sie das großkanonische Potential J.

(c) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle \hat{N} \rangle$.

(d) Skizzieren Sie $\langle \hat{n}_k \rangle$ als Funktion von ε_k für $T = 0$ und fuer $0 < k_{\mathrm{B}}T < \varepsilon_{\mathrm{F}}$. Markieren Sie in Ihrer Skizze das chemische Potential und die relevanten Werte der mittleren Besetzungszahlen. Welchen Wert nimmt $\langle \hat{n}_k \rangle$ an der Stelle $\varepsilon = \mu$ bei $T > 0$ an?

4 Wasserstoffplasma (?? Punkte)

Wasserstoffplasma besteht aus atomarem Wasserstoff, bei dem nicht nur der elektronische Grundzustand besetzt ist. Wir betrachten das großkanonische Ensemble an nicht-wechselwirkenden Spin-up Elektronen in nur einem Atom im Plasma. Wir verwenden die niedrigsten beiden Ein-Elektronen-Eigenzustände $k = 1$ und $k = 2$ des Wasserstoffatoms als Basis. Die Eigenenergien seinen ε_1 und $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

(a) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme von Spin-up Elektronen mit der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ und $\xi_k = e^{-\beta\varepsilon_k}$ gegeben ist durch

$$Z_{\mathrm{G}} = 1 + z(\xi_1 + \xi_2) + z^2\xi_1\xi_2.$$

(b) Die mittlere Teilchenzahl an Spin-up Elektronen pro Atom beträgt $1/2$ im ladungs- und spin-neutralen Plasma. Zeigen Sie, dass sich daraus folgende Gleichung für die Fugazität z der Spin-up Elektronen ergibt: $3z^2\xi_1\xi_2 + z(\xi_1 + \xi_2) - 1 = 0$.

(c) Lösen Sie die Gleichung in (b) und zeigen Sie zunächst, dass sich für die Fugazität bei hohen Temperaturen, also kleinem β, folgende Asymptotik ergibt $z(\beta) = 1/3 + \mathcal{O}(\beta)$. Geben Sie damit die Asymptotik für das chemische Potential an.

Viel Erfolg!